第1题 自我发明：回旋纸飞镖

Prob. No. 1 Invent Yourself – Paper Boomberang

南开大学物理科学学院
汪子涵

内蒙古 • 呼和浩特 2025.08

目录

1 简介
题目介绍、关键词分析

2 预实验
预实验装置、现象、结论

3 理论模型
定性解释、定量计算

4 实验分析
实验装置、理论验证、相关参数探究

5 总结
扣题总结、局限性、展望

简介

题目介绍、关键词概括

Invent Yourself: Paper Boomerang

Make a returning boomerang from a sheet of paper by folding and/or cutting. Investigate how its motion depends on relevant parameters.

自主发明：纸回旋镖

通过折叠和（或）剪切，将一张纸制成一个回旋飞镖。探究它的运动是如何依赖相关参数的。

Returning boomerang
回旋（可返回）飞镖

Motion “回旋运动“



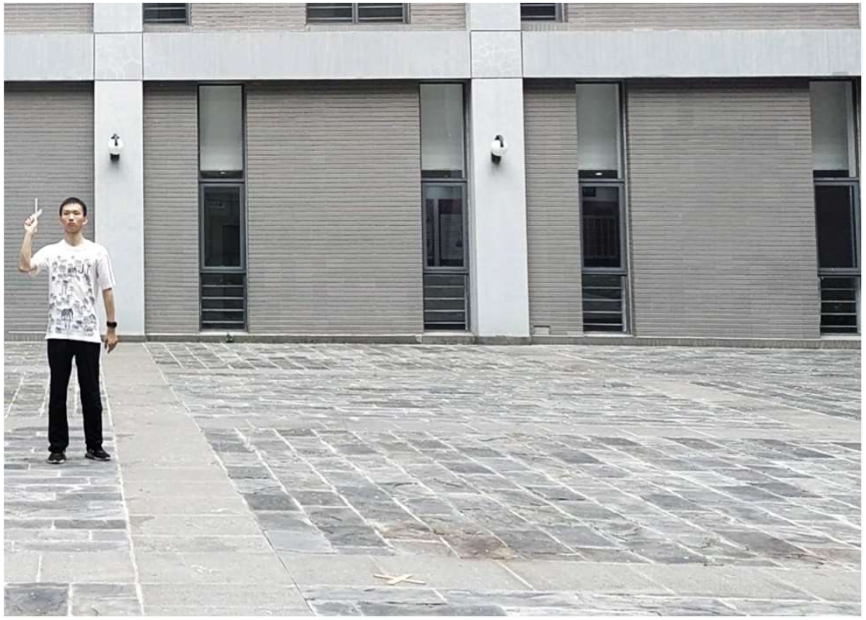
VID. 1. 回旋镖“精确回旋”示意视频

精确回旋

落点距出射的水平距离小于2.25 m（三步）

Returning boomerang
回旋飞镖

Motion “回旋运动“



VID. 2. 回旋镖“非精确回旋”示意视频

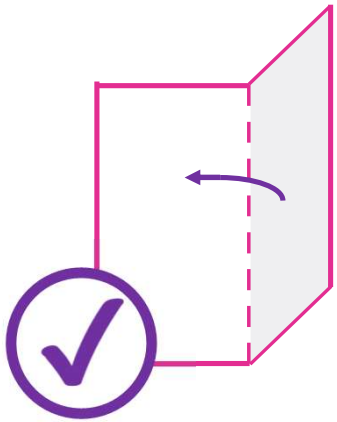
⊗ 非精确回旋

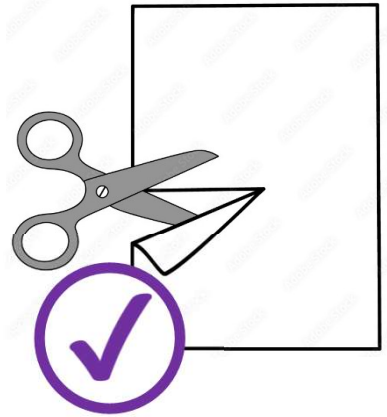
落点距出射的水平距离大于2.25 m（三步）

Paper

一种由（主要）木质纤维压制而成的薄片材料。（Wikipedia）

Folding or Cutting







Invent Yourself: Paper Boomerang

Make a returning boomerang from a sheet of paper by folding and/or cutting. Investigate how its motion depends on relevant parameters.

自主发明：纸回旋镖

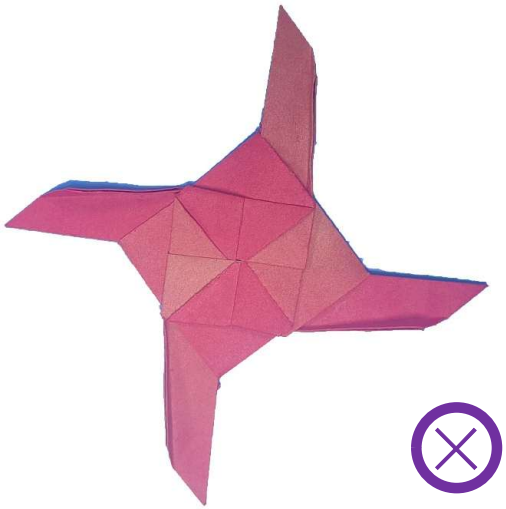
通过折叠和（或）剪切，将一张纸制成一个回旋飞镖。探究它的运动是如何依赖相关参数的。

1. 制作可回旋的纸飞镖
2. 探究回旋镖精确回旋运动的条件

预实验

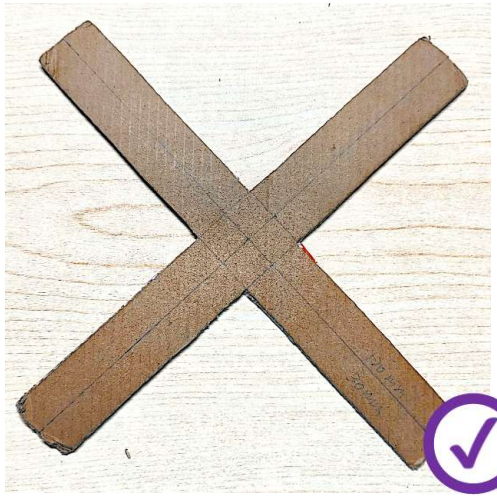
预实验装置、现象、结论

制作可回旋的纸飞镖



⊗不稳定

FIG. 1. 折叠普通打印纸/卡纸制成的回旋镖



✓稳定

FIG. 2. 裁剪普通卡纸制成的回旋镖

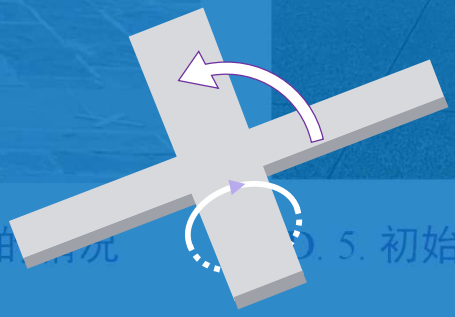






平动运动（进动） + 绕质心**转动**（自转+翻滚）





VID. 3. 回旋镖精确回旋

VID. 4. 初始角速度近似为0的情况

VID. 5. 初始速度近似为0的情况



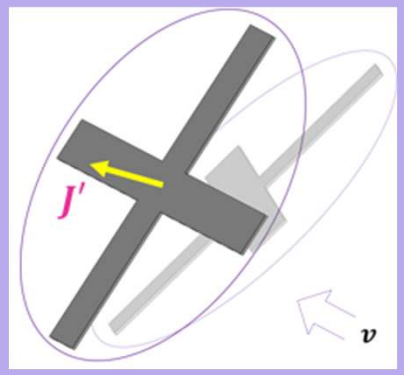
回旋镖受到垂直于旋转平面的**升力**



初始倾角过大或过小均无法回旋

理论模型

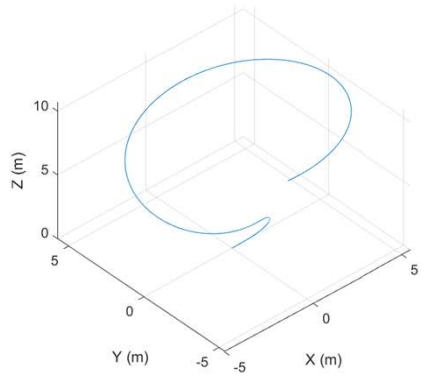
定性解释，定量计算



定性解释

非均匀升力

回转效应

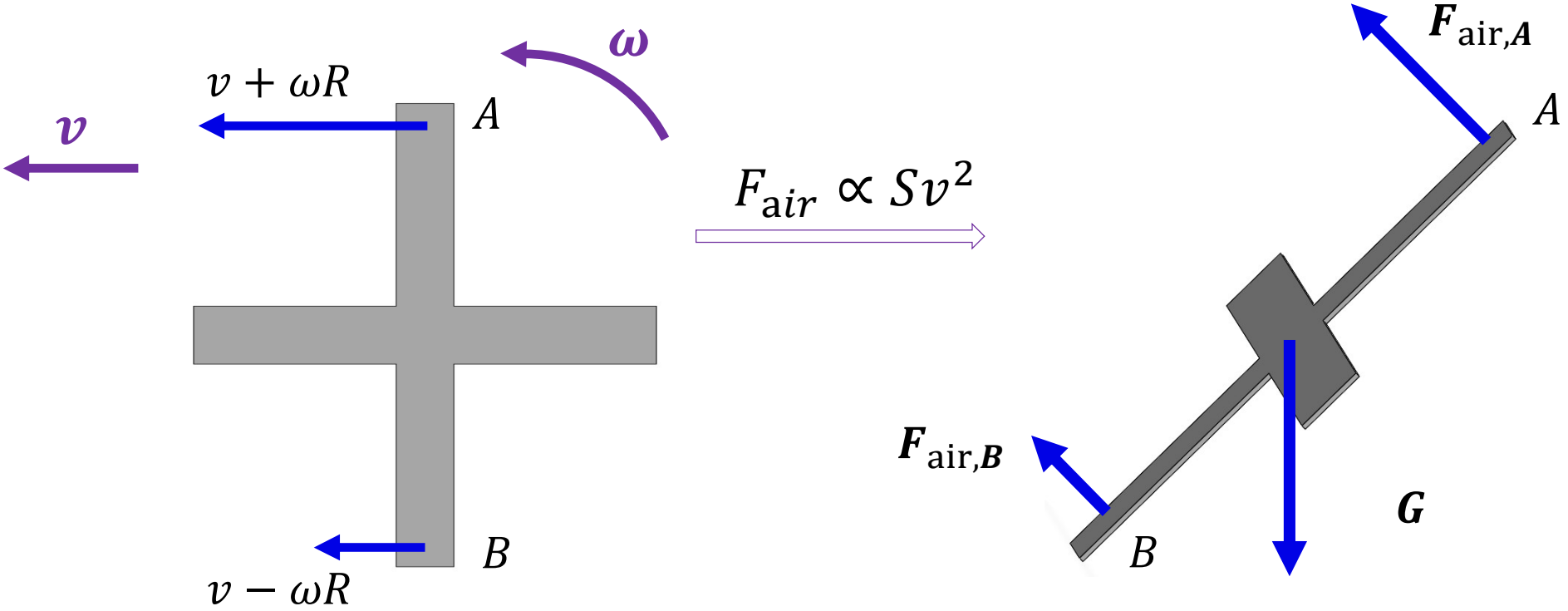


定量计算

气动力计算

轨迹计算

非均匀升力的产生



(a) 速度分布示意图　　(b) 受力分析示意图

FIG. 3. 非均匀升力产生示意图

定性解释　　定量计算

回转效应

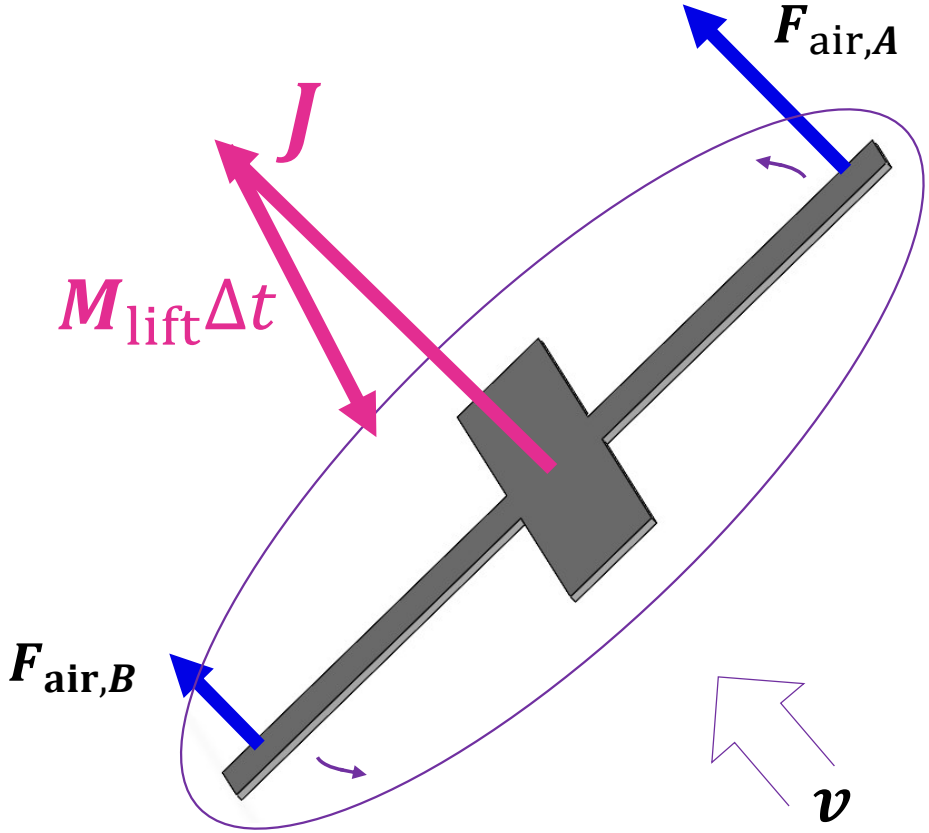


FIG. 4. 回旋镖回转效应示意图

定性解释　　定量计算

回转效应

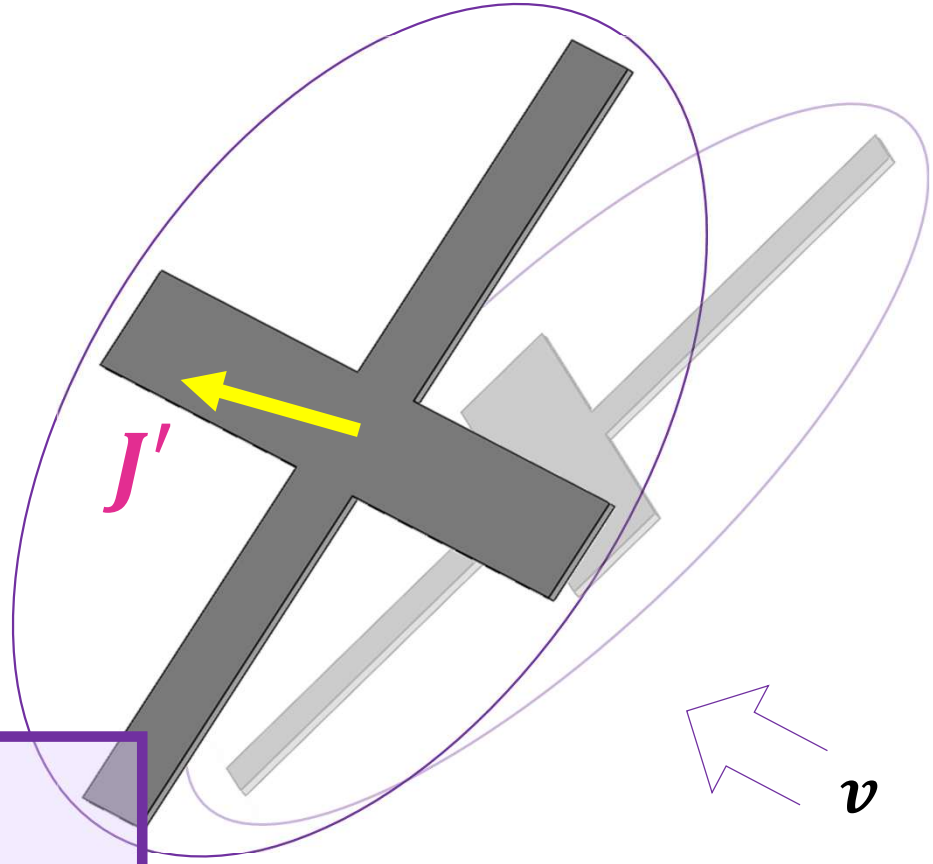
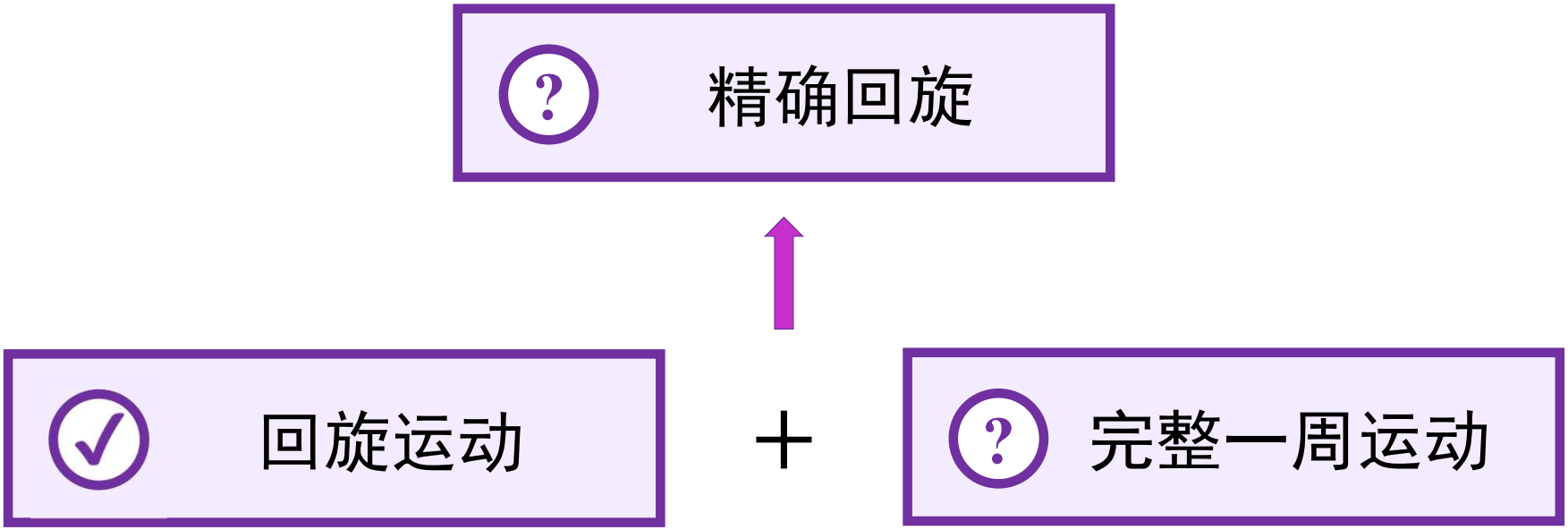


FIG. 4. 回旋镖回转效应示意图

回旋运动

定性解释

定量计算



定性解释

定量计算

完整一周运动

F_{lift} ⟷ G

促进回旋
促进上升

促进下降

v, S ⟷ m

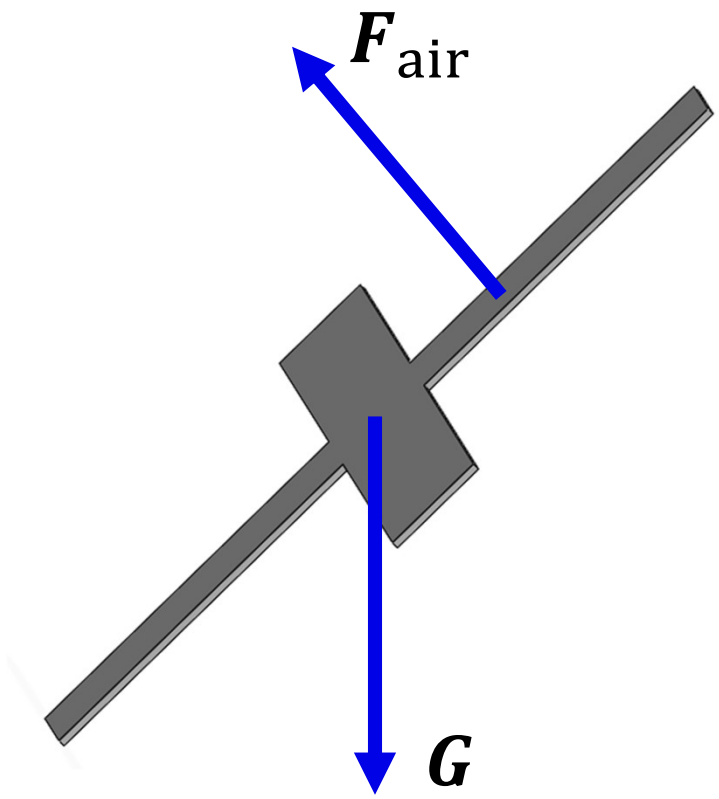
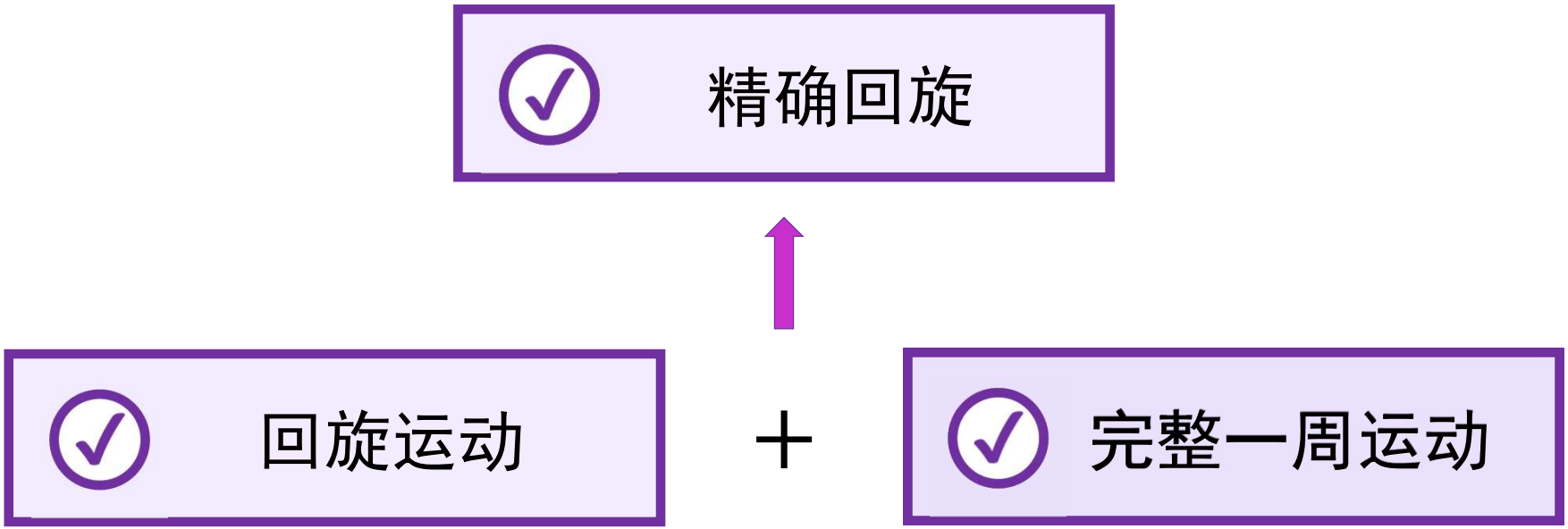


FIG. 5. 回旋镖运动过程中气动力F_{air}与重力G的抗衡

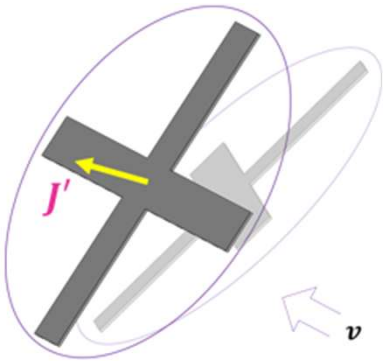
定性解释

定量计算



定性解释

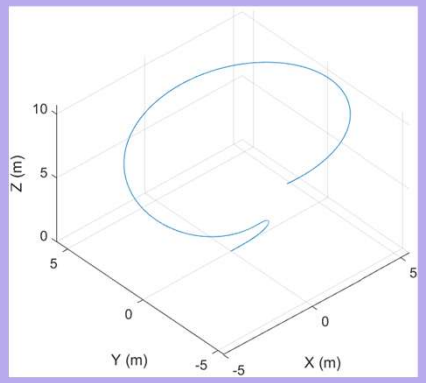
定量计算



定性解释

非均匀升力

回转效应



定量计算

动力学方程

轨迹计算

基本假设

- 回旋镖为**刚体**
- 回旋镖**质量均匀**分布
- 空气密度恒定
- 无风环境

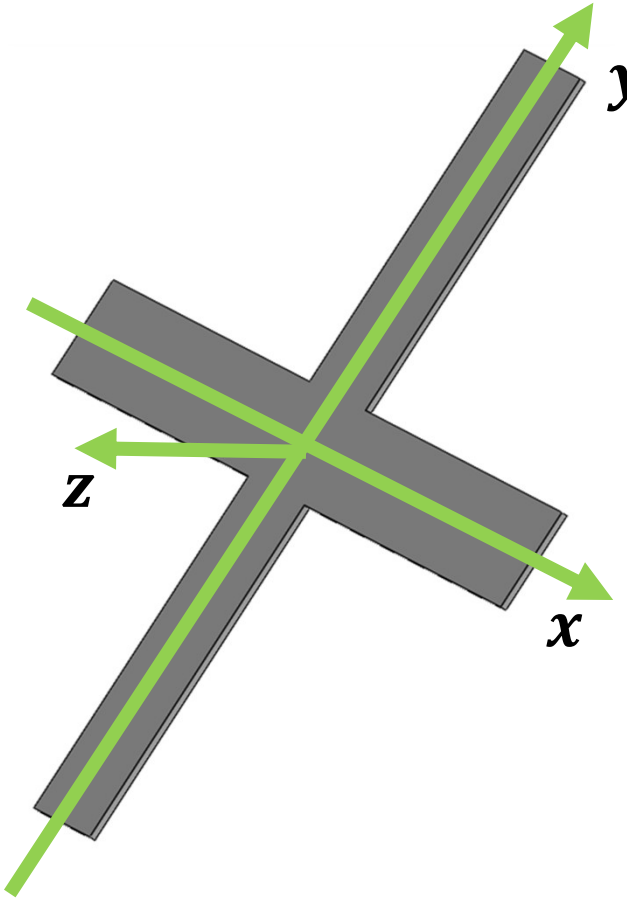


FIG. 6. 回旋镖体坐标系的坐标轴

定性解释

定量计算

动力学方程

体坐标系中平动动力学方程

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F}_{\text{lift}} + \boldsymbol{F}_{\text{drag}} + \boldsymbol{F}_{\text{gravity}} + \boldsymbol{F}_{\text{inertial}}$$

$$l = \frac{1}{2}\rho v^2 c C_l \qquad d = \frac{1}{2}\rho v^2 c C_d$$

ρ	空气密度
v	某点速率
v_{rel}	空气相对回旋镖速度
c	回旋镖翼宽
R	回旋镖翼长
α	攻角
l	单位长度叶素的升力
d	单位长度叶素的阻力
g_1	重力加速度分量

定性解释

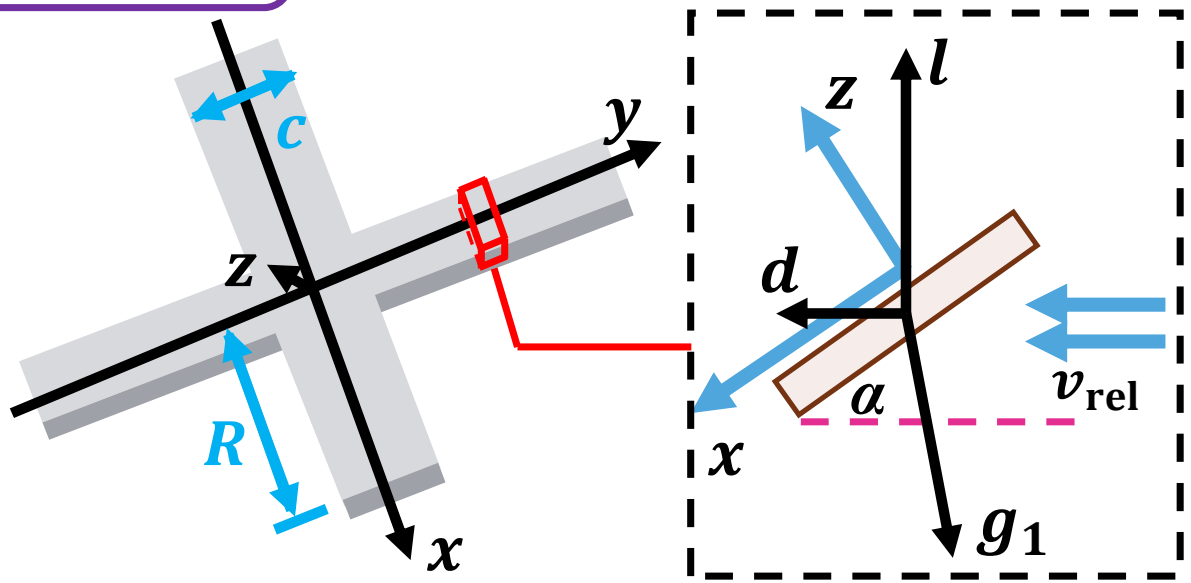


FIG. 7. 利用叶片微元（叶素）计算气动力示意图

定量计算

动力学方程

体坐标系中转动动力学方程

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_x-(I_2-I_3)\omega_y\omega_z=M_{l,x}+M_{d,x} \\ I_2\dot{\omega}_y-(I_3-I_1)\omega_z\omega_x=M_{l,y}+M_{d,y} \\ I_3\dot{\omega}_z-(I_1-I_2)\omega_x\omega_y=M_{l,z}+M_{d,z} \end{cases}$$

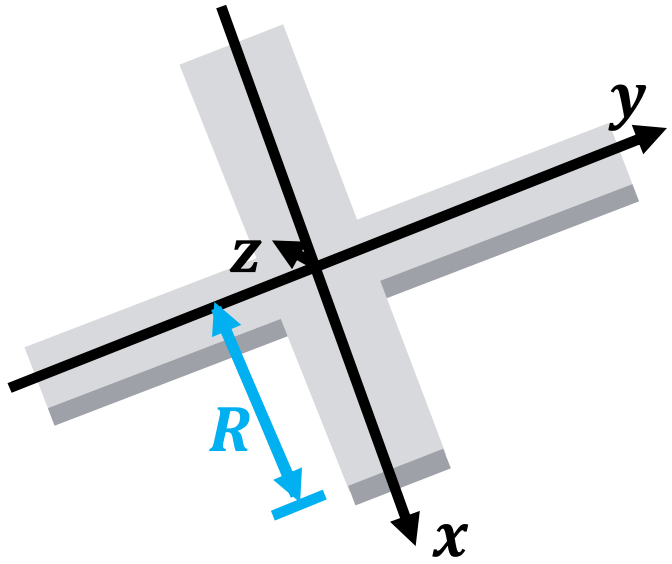


FIG. 8. 回旋镖示意图

$$\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} \frac{1}{12}MR^2 & & \\ & \frac{1}{12}MR^2 & \\ & & \frac{1}{6}MR^2 \end{pmatrix}$$

定性解释

I_i	绕 i 轴的转动惯量（$i=1,2,3$）
ω_i	i轴方向角速度
$M_{l,i}$	i轴方向升力力矩
$M_{d,i}$	i轴方向阻力力矩
M	回旋镖质量
R	回旋镖翼长

定量计算

气动力系数的确定

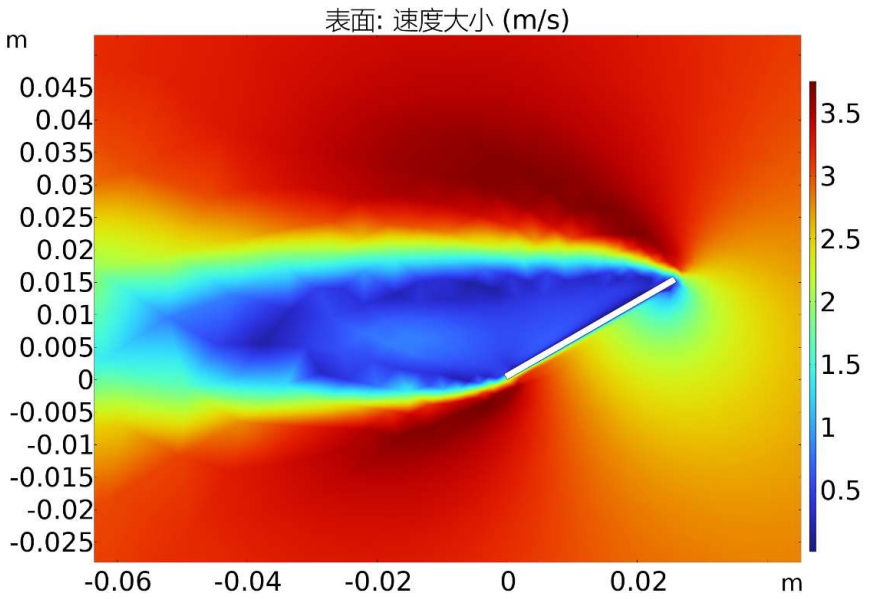
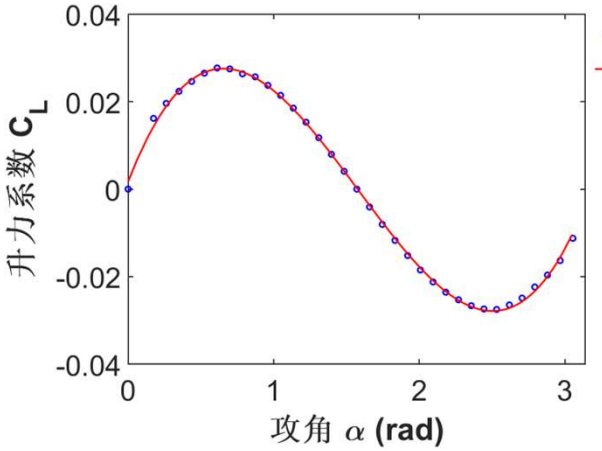


FIG. 9. CFD仿真结果示意图

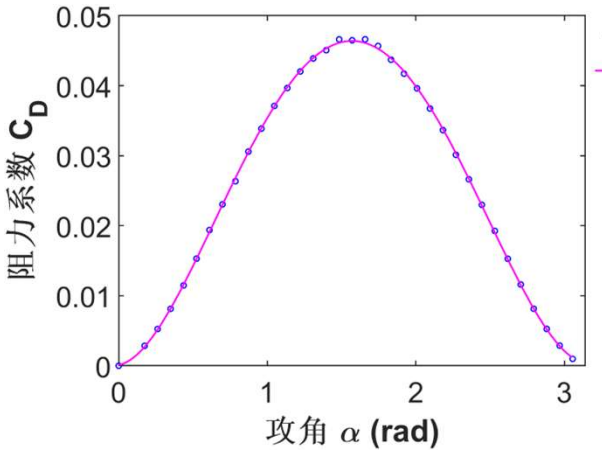
* 注：$\mathrm{Re} \sim 10^6$，故采用SST湍流模型

定性解释



$R^2 = 0.9991$

FIG. 10. 升力系数C_l随攻角α变化的拟合曲线



$R^2 = 0.9998$

FIG. 11. 阻力系数C_d随攻角α变化的拟合曲线

定量计算

气动力系数的确定

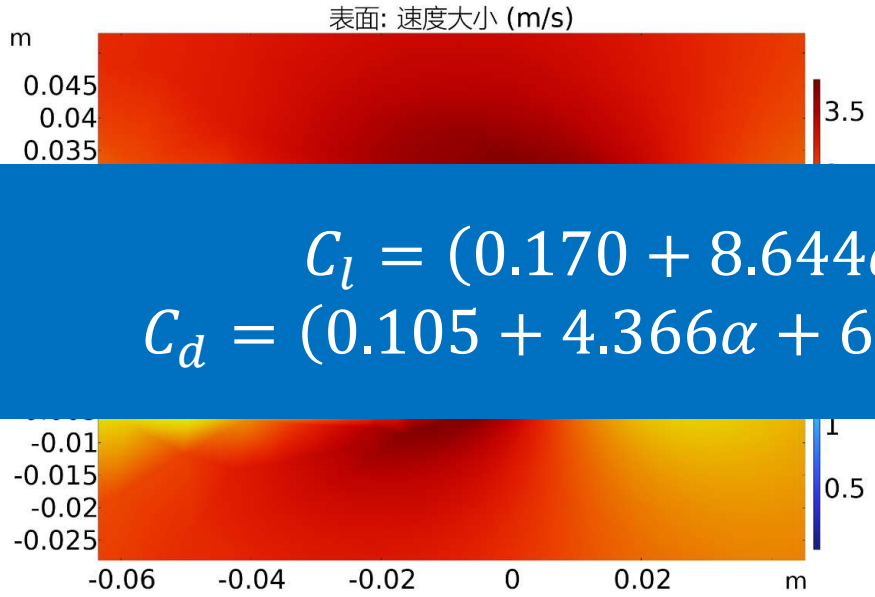
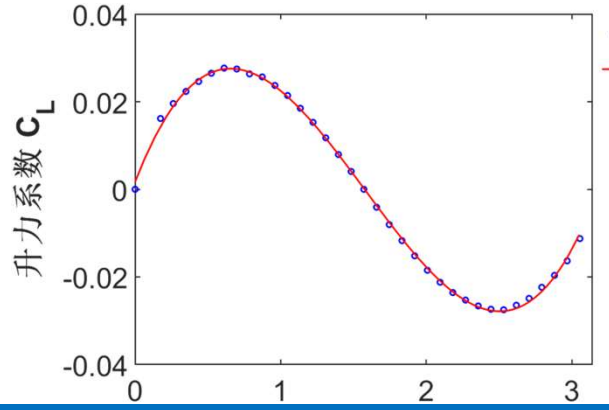


FIG. 9. CFD仿真结果示意图

* 注：$Re \sim 10^6$，故采用SST湍流模型

定性解释



$R^2 = 0.9991$

$$C_l = (0.170 + 8.644\alpha - 8.323\alpha^2 + 1.757\alpha^3) \times 10^{-2}$$
$$C_d = (0.105 + 4.366\alpha + 68.28\alpha^2 - 44.42\alpha^3 + 7.083\alpha^4) \times 10^{-2}$$

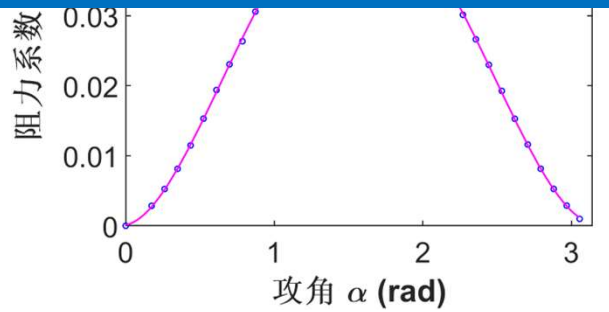


FIG. 11. 阻力系数C_d随攻角α变化的拟合曲线

定量计算

6自由度动力学方程

↓

体坐标系中回旋镖的运动

↓

地面坐标系中回旋镖的运动

定性解释

MATLAB®

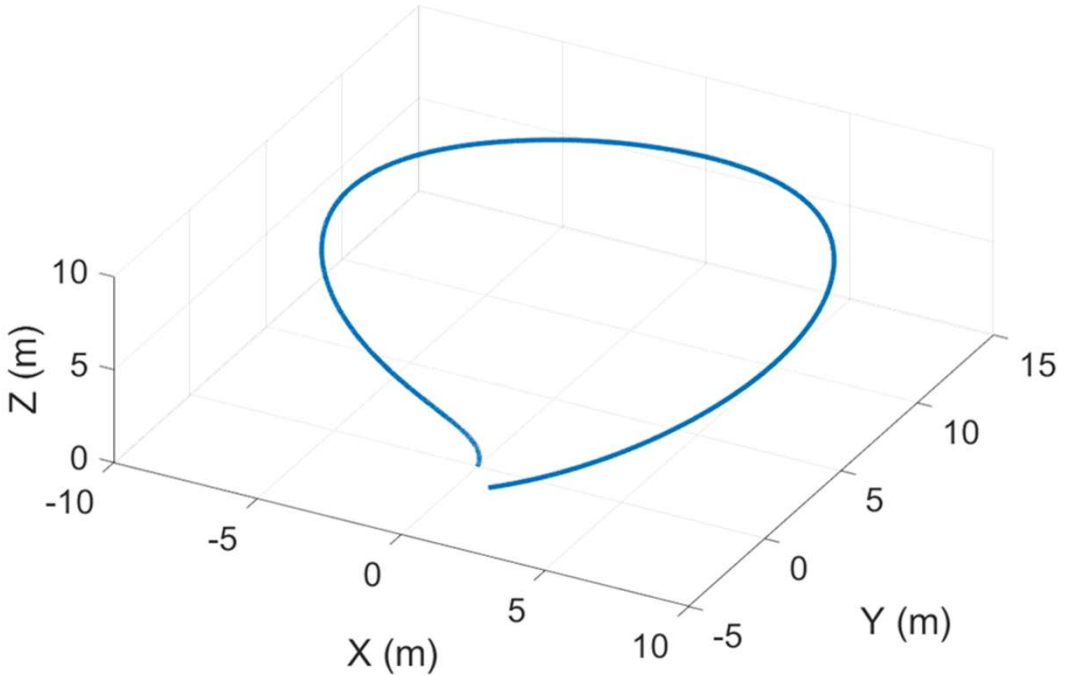


FIG. 12. 回旋镖轨迹仿真结果

定量计算

通过数值实验得到的精确回旋对应的$m-S$关系

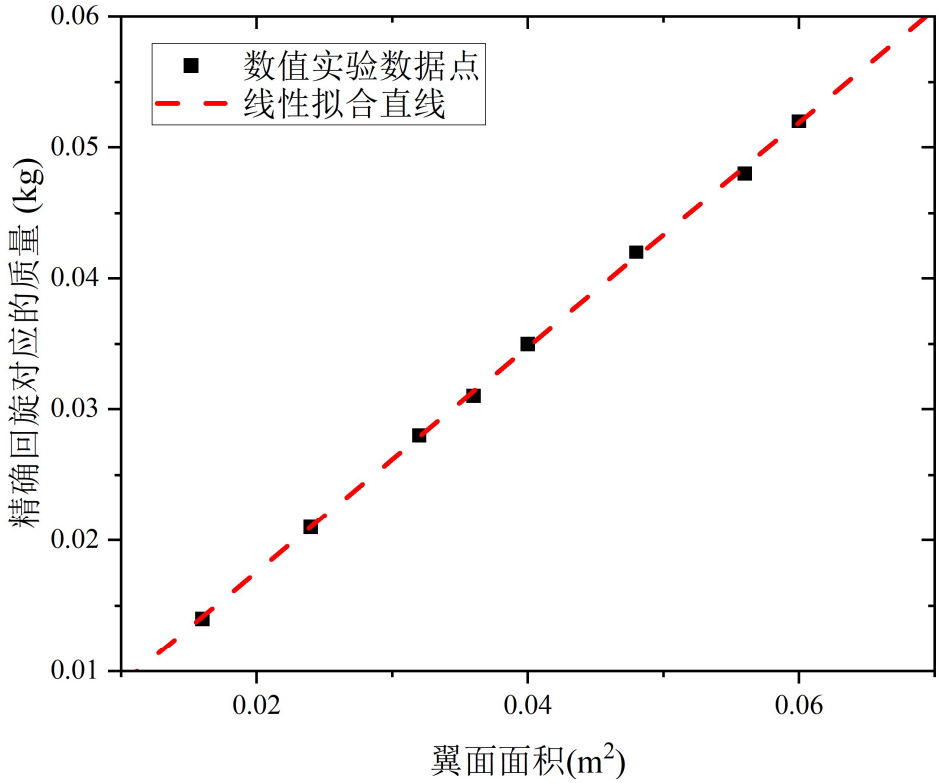


FIG. 13. 精确回旋飞镖质量m与翼面面积的关系

相关系数	$R^2 = 0.9998$
斜率	$k = 0.859\ kg/m^2$
截距	$b = 3.9 \times 10^{-4}$ kg

面密度 $\sigma = 0.859\ \mathrm{kg/m^2}$

定性解释

定量计算

实验分析

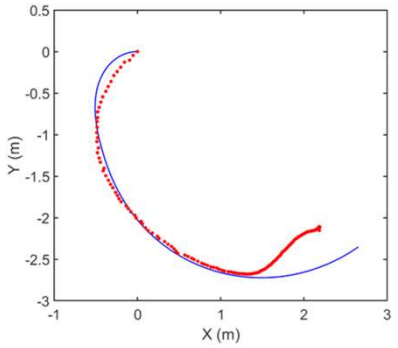
实验装置、相关参数探究



实验装置

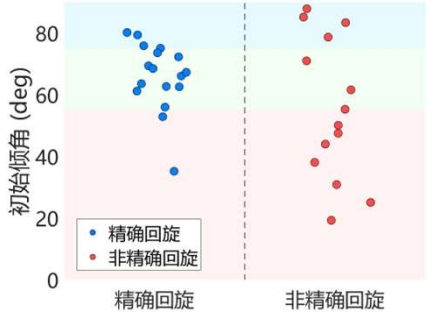
四机位运动捕捉

数据收集



理论验证

飞行轨迹



相关参数探究

精确回旋条件

四机位运动捕捉

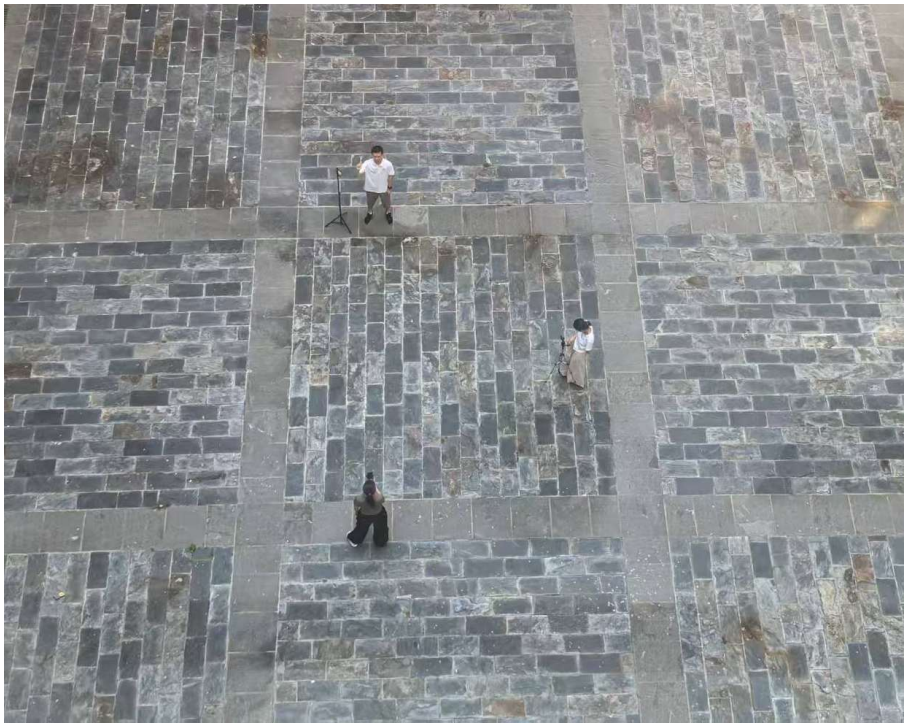


FIG. 14. 实验装置俯视图

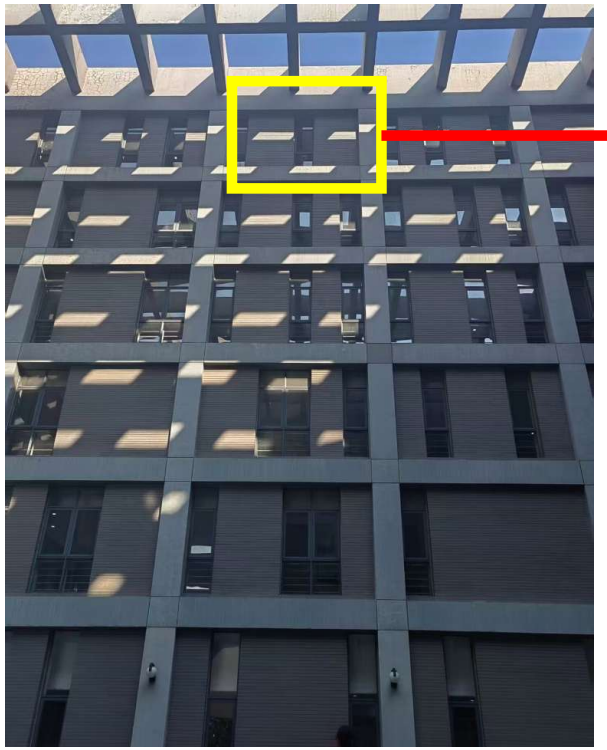


FIG. 15. 俯拍机位

四机位运动捕捉

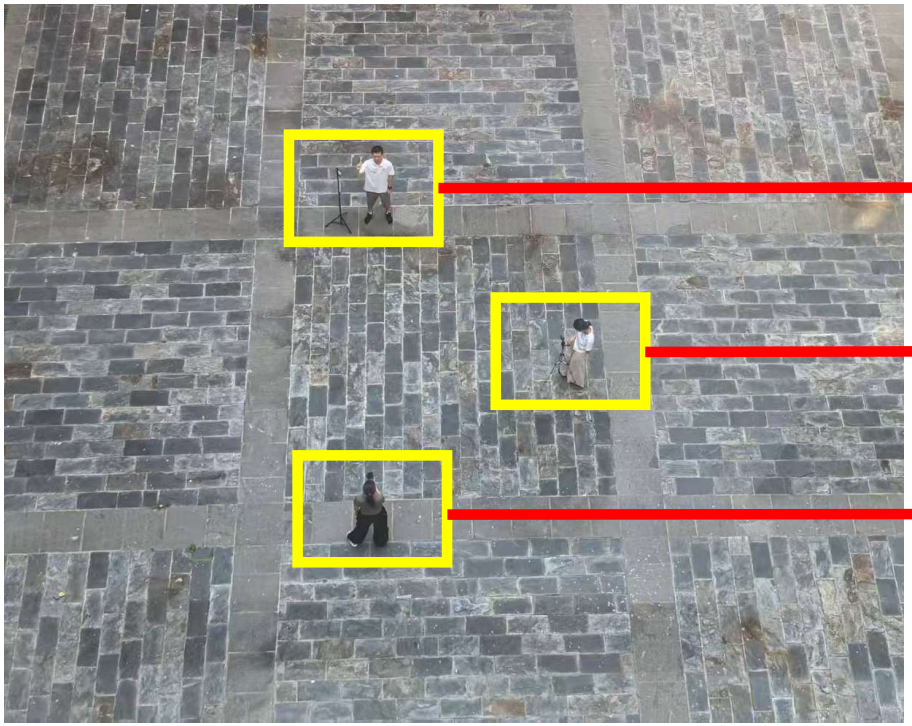


FIG. 14. 实验装置俯视图

四机位运动捕捉



FIG. 16. 数字式风速测量仪

无风环境，
符合理论假设

实验装置 理论验证 相关参数探究

数据采集方法

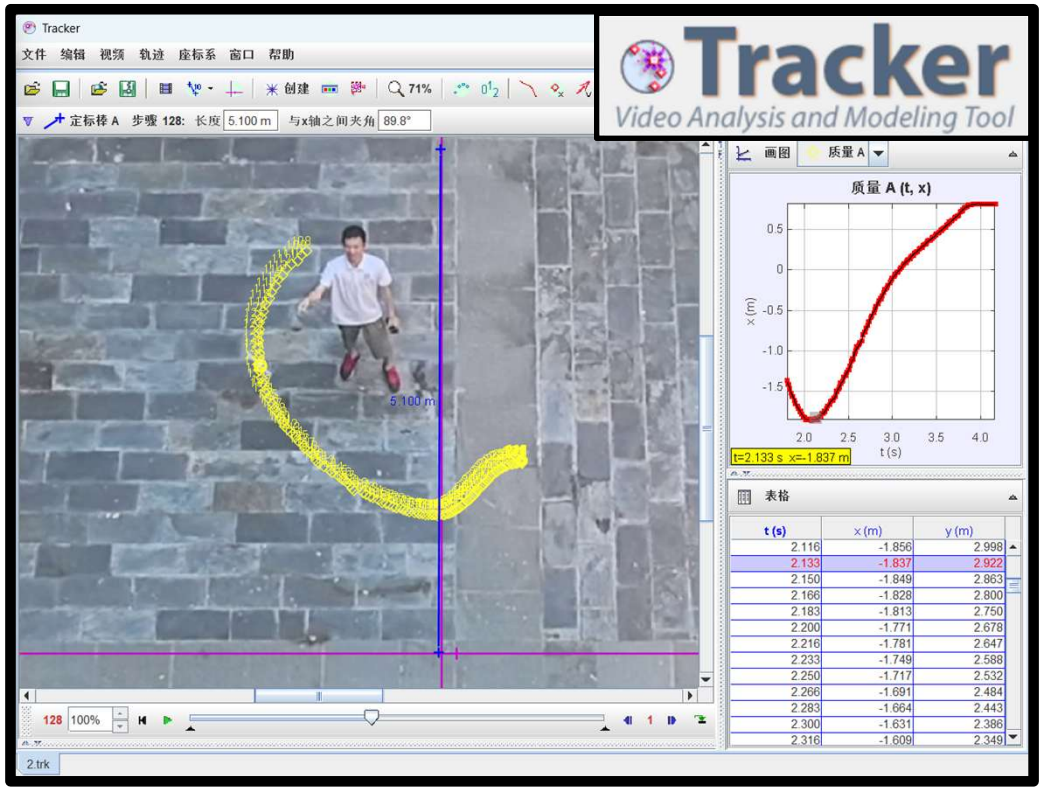


FIG. 17. 利用Tracker进行数据采集

运动轨迹

初始速度

初始角速度

初始倾角

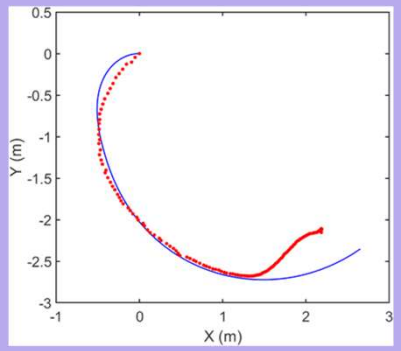
实验装置　　理论验证　　相关参数探究



实验装置

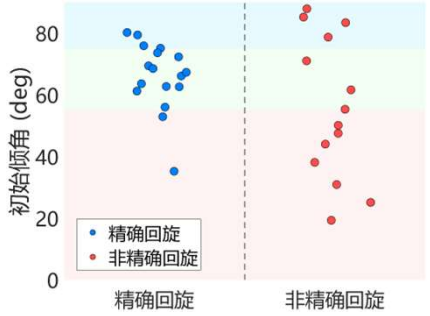
四机位运动捕捉

数据收集



理论验证

飞行轨迹

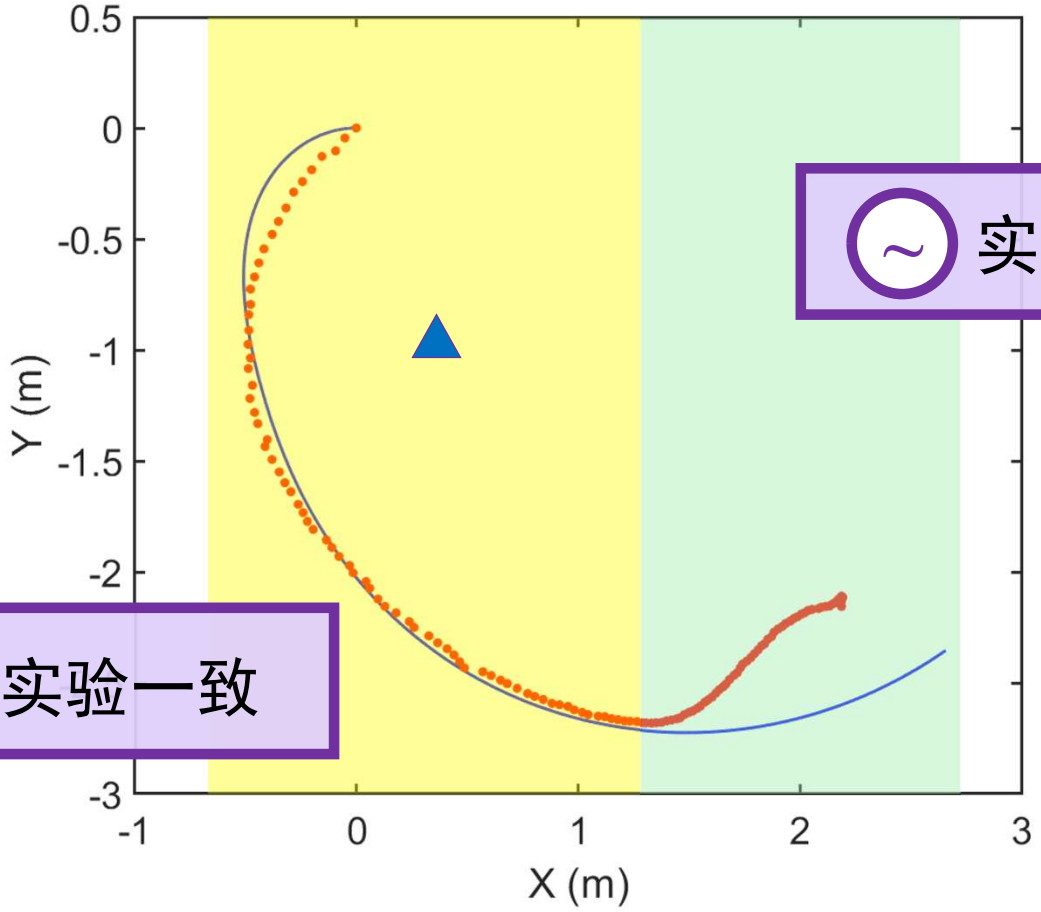


相关参数探究

精确回旋条件

理论验证

$v_{C0} \simeq 2.5\ \mathrm{m/s}$
$\omega_0 \simeq 0.8\ \mathrm{rad/s}$
$\Theta = 50°$
$m = 0.0083\ \mathrm{g}$
$R = 0.12\ \mathrm{m}$
$c = 0.03\ \mathrm{m}$



~ 实验相比理论有偏差

速度增大

工艺缺陷放大

气流扰动增大

✓ 理论与实验一致

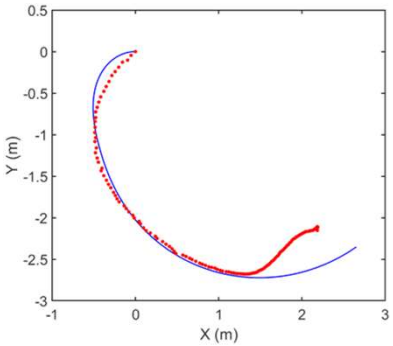
FIG. 18. 回旋镖仿真轨迹（XY平面投影图）与实验数据对比图



实验装置

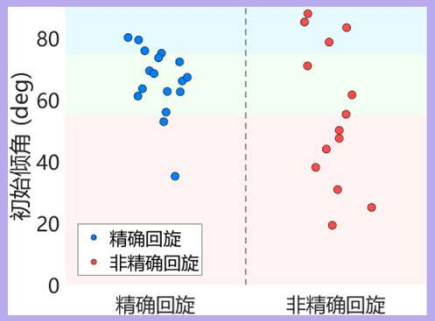
四机位运动捕捉

数据收集



理论验证

飞行轨迹



相关参数探究

质量

初始倾角

初始速度

质量与面积对精确回旋的影响

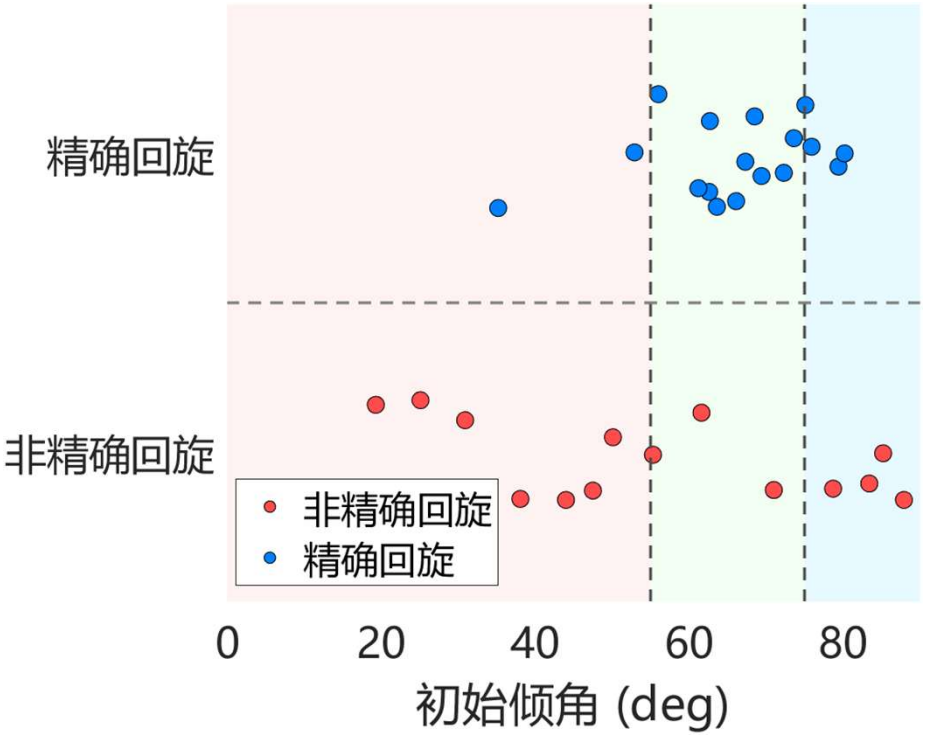
TAB. 1. 质量面密度对精确回旋的影响（理论参考值：0.859 kg/m^2）

面密度(kg/m^2)	能否精确回旋
0.481	不能
0.615	能
0.757	能
0.898	能
0.922	能
1.659	不能

证明理论合理

精确回旋面密度范围：
$0.615 \sim 0.922\ \mathrm{kg/m^2}$

初始倾角对精确回旋的影响



精确回旋倾角范围：$55° - 75°$

倾角过大 ⋙ 升力竖直分量不足

倾角过小 ⋙ 在竖直平面内做圆周运动

* 飞镖尺寸：
翼长$R = 0.120$ m、翼宽$b = 0.030$ m
面密度$\sigma = 0.757\ \mathrm{kg/m^2}$

FIG. 19. 不同初始倾角精确回旋与非精确回旋情况统计

初始速度对精确回旋的影响

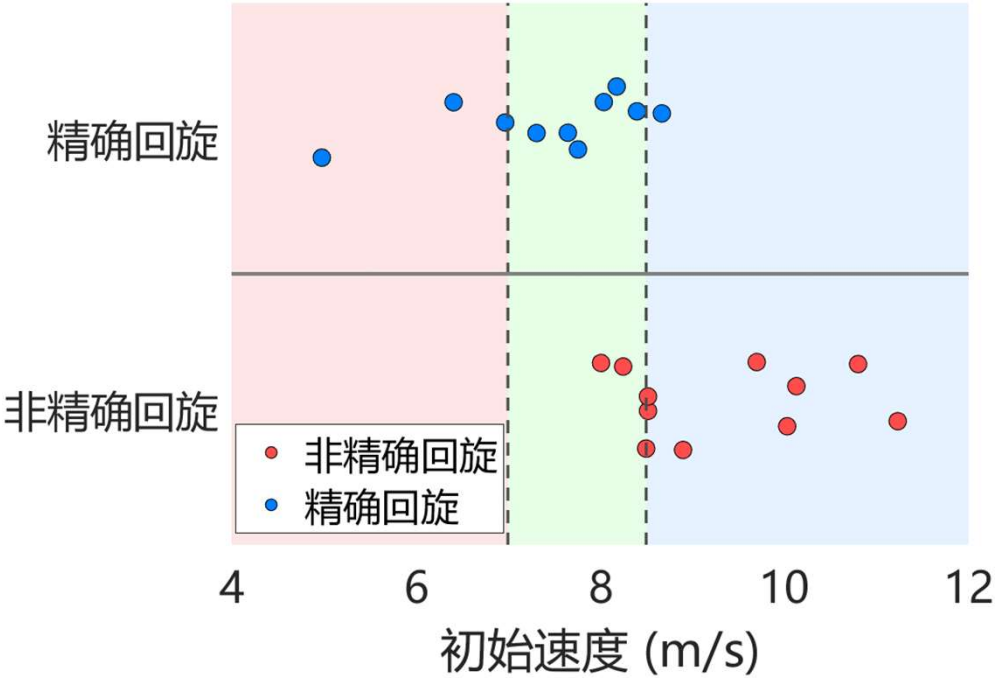


FIG. 20. 不同初始速度精确回旋与非精确回旋情况统计

精确回旋速度范围：7.0~8.5 m/s

速度过小 ⋙ 升力不足，重力主导

速度过大 ⋙ 回旋偏差放大

* 飞镖尺寸：
翼长$R = 0.120$ m、翼宽$b = 0.030$ m
面密度$\sigma = 0.757\ \mathrm{kg/m^2}$

总结

研究结论、参考文献

Invent Yourself: Paper Boomerang

Make a returning boomerang from a sheet of paper by folding and/or cutting. Investigate how its motion depends on relevant parameters.

探究回旋镖精确回旋运动的条件

✓**质量m**与**面积S**匹配—— $\sigma = m/S = 0.859\ \mathrm{kg/m^2}$

✓合适的**初始倾角**——55°~75°

✓合适的**初始速度**——7.0~8.5 m/s

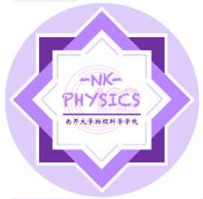
参考文献

[1] Hess F. The aerodynamics of boomerangs[J]. Scientific American, 1968, 219(5): 124-139.
[2] Hess F. Boomerang Dynamics[M]. Rijksuniversiteit Groningen, Mathematisch Instituut, 1973.
[3] Azuma A, Beppu G, Ishikawa H, et al. Flight dynamics of the boomerang, part 1: fundamental analysis[J]. Journal of guidance, control, and dynamics, 2004, 27(4): 545-554.
[4] Beppu G, Ishikawa H, Azuma A, et al. Flight Dynamics of the Boomerang, Part Two: Effects of Initial Condition and Geometrical Configuration[J]. Journal of guidance, control, and dynamics, 2004, 27(4): 555-563.
[5] Vassberg J. Boomerang flight dynamics[C]//30th AIAA Applied Aerodynamics Conference. 2012: 2650.
[6] Hubbard M, Moore A L. Exactly returning boomerangs[J]. Sports Engineering, 2014, 17: 197-206.
[7] Pomeroy B W, Uhlig D V. Boomerang Flight Tests[C]//32nd AIAA Applied Aerodynamics Conference. 2014: 3127.
[8] Barceló G. Theory of Dynamic Interactions: The Flight of the Boomerang[J]. Journal of Applied Mathematics and Physics, 2014, 2014.
[9] Barceló G. Theory of dynamic interactions: the flight of the boomerang II[J]. Journal of Applied Mathematics and Physics, 2015, 3(5): 545-555.

[10] Gudem P, Schütz M, Holland K. Flight Dynamics of Boomerangs: Impact of Reversal of Airflow, Reversal of Angle-of-Attack and Asymmetric Lift[C]//AIAA Aviation 2019 Forum. 2019: 2826.
[11] Landell-Mills M N. How boomerangs fly according to Newtonian mechanics[J]. 2022.
[12] Gudem P, Laslett M, Carfano G, et al. Flight Dynamics of Boomerangs: Impact of Drag Force and Drag Torque[C]//AIAA AVIATION 2020 FORUM. 2020: 2709.

谢　谢！

第01题 自主设计：回旋纸飞镖
Prob. No. 01 Invent yourself: Paper Boomerang



南开大学物理科学学院
汪子涵

受力分析

y轴方向的翼

$$\boldsymbol{F}_1 = \int_{-R}^{R} \begin{pmatrix} -l\sin\alpha + d\cos\alpha \\ 0 \\ l\sin\alpha + d\cos\alpha \end{pmatrix} \mathrm{d}\eta \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{M}_1 = \int_{-R}^{R} \begin{pmatrix} (l\sin\alpha + d\cos\alpha)\eta \\ 0 \\ (l\sin\alpha - d\cos\alpha)\eta \end{pmatrix} \mathrm{d}\eta \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_{cx} - \omega_z\eta \\ v_{cy} \\ v_{cz} + \omega_x\eta \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

$$\sin\alpha = \frac{v_{cz} + \omega_x\eta}{v} \tag{1.7}$$

x轴方向的翼

$$\boldsymbol{F}_2 = \int_{-R}^{R} \begin{pmatrix} 0 \\ l\sin\beta - d\cos\beta \\ l\cos\beta + d\sin\beta \end{pmatrix} \mathrm{d}\eta \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{M}_2 = \int_{-R}^{R} \begin{pmatrix} 0 \\ -(l\sin\beta + d\sin\beta)\eta \\ (l\sin\beta - d\cos\beta)\eta \end{pmatrix} \mathrm{d}\eta \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_{cx} \\ v_{cy} + \omega_z\eta \\ v_{cz} - \omega_y\eta \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

$$\sin\beta = -\frac{v_{cz} - \omega_y\eta}{v} \tag{1.11}$$

坐标系变换

➢ 体坐标系与惯性坐标系的坐标变换

体坐标系中的坐标

惯性坐标系中的坐标

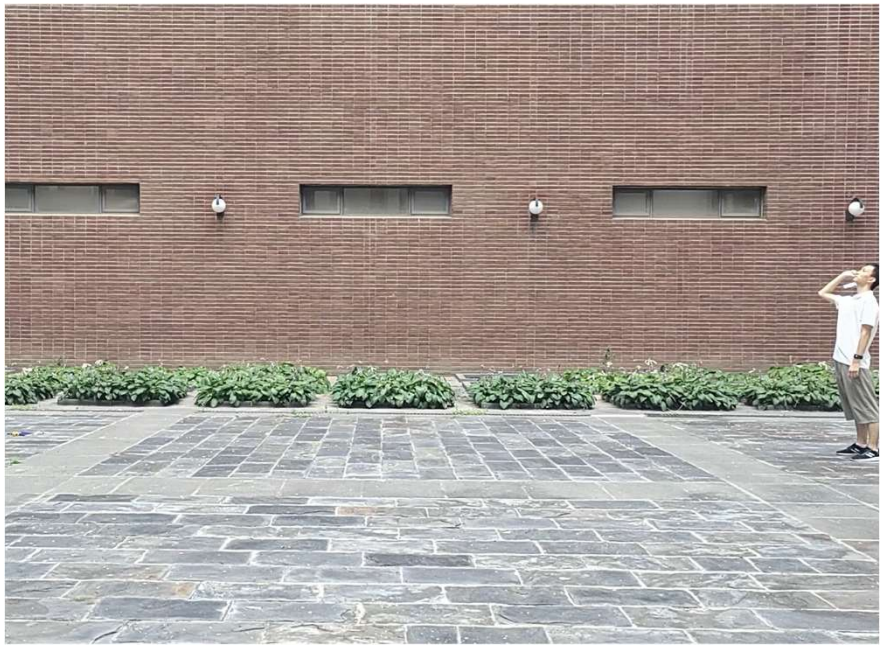
$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = T_0 \cdot (T_I)_0 \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

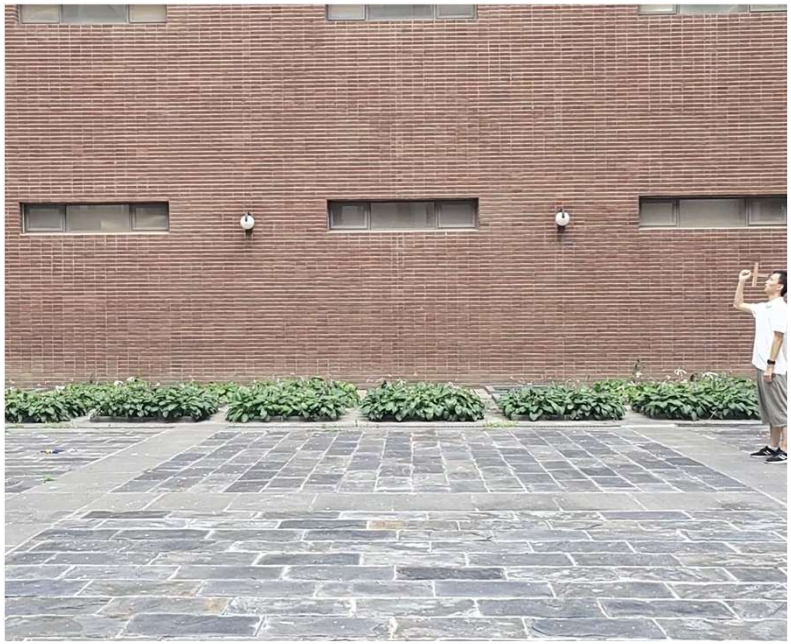
$$(T_I)_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Phi_0 & \sin\Phi_0 \\ 0 & -\sin\Phi_0 & \cos\Phi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Theta_0 & 0 & -\sin\Theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Theta_0 & 0 & \cos\Theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Psi_0 & \sin\Psi_0 & 0 \\ -\sin\Psi_0 & \cos\Psi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

符号	含义
ϕ, θ, ψ	欧拉角
Φ_0, Θ_0, Ψ_0	初始姿态角

质量与面积对精确回旋的影响

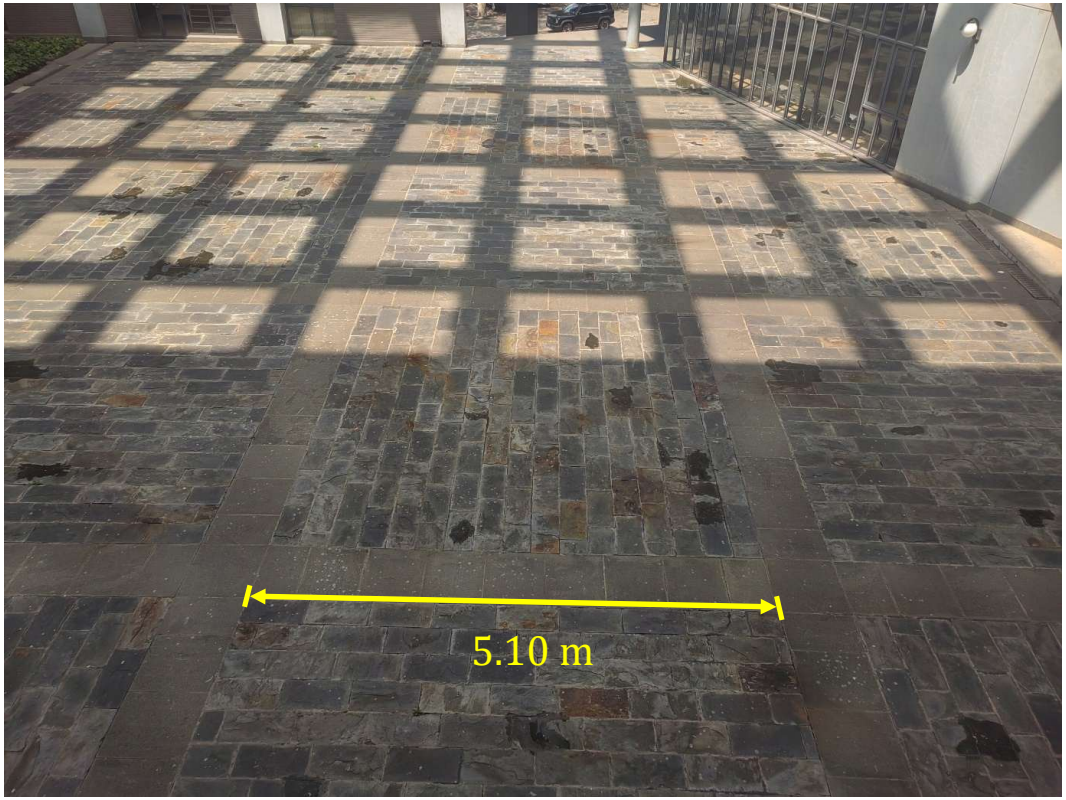


(a)



(b)

VID. ?. 回旋镖质量对回旋运动的影响


5.10 m