# 量子场论视角下反常量子霍尔效应的推导

汪子涵*

南开大学物理科学学院，天津 300071

2026 年 5 月 4 日

**摘要**

量子反常霍尔效应作为一种无需外磁场即可实现量子化横向电导的拓扑物态，在低能耗拓扑电子学器件中具有巨大的应用潜力。本文突破了传统能带论中基于 Berry 曲率积分的计算框架，在纯量子场论的理论体系下，对二维有质量狄拉克系统中的量子反常霍尔效应进行了严格推导。研究从 2+1 维有质量狄拉克场的拉格朗日量出发，首先利用诺特定理导出了全局 U(1) 规范对称性对应的守恒流；随后通过引入最小耦合将外加电磁场视为微扰，基于 Gell-Mann-Low 定理，严格计算了单圈近似下的真空极化张量；最终在零温与静态极限下，提取极化张量的反对称部分并结合 Kubo 公式，推导出仅由狄拉克质量项决定的量子化反常霍尔电导解析表达式。理论结果不仅从场论层面给出了单一狄拉克锥贡献半整数电导的微观解释，更与磁性拓扑绝缘体薄膜中的前沿实验观测实现了完美契合，充分展现了量子场论方法在处理凝聚态多体问题中的严谨性与普适性。

**关键词**：量子场论；量子反常霍尔效应；真空极化张量；狄拉克费米子；拓扑绝缘体

*电子邮箱：wang.zihan@mail.nankai.edu.cn

# A Quantum Field Theoretical Derivation of the Quantum Anomalous Hall Effect

**Zihan Wang**[1]

*School of Physics, Nankai University, Tianjin 300071, China*

**Abstract**

As a topological state of matter capable of realizing quantized transverse conductance without an external magnetic field, the quantum anomalous Hall effect (QAHE) holds immense potential for applications in low-power-consumption topological electronic devices. Moving beyond the traditional band theory framework based on Berry curvature integration, this paper rigorously derives the QAHE in a two-dimensional massive Dirac system strictly within the theoretical framework of pure quantum field theory. Starting from the Lagrangian of a 2+1 dimensional massive Dirac field, we first employ Noether' s theorem to derive the conserved current associated with the global U(1) gauge symmetry. Subsequently, by introducing minimal coupling to treat the external electromagnetic field as a perturbation and based on the Gell-Mann-Low theorem, we rigorously calculate the vacuum polarization tensor at the one-loop approximation. Finally, in the zero-temperature and static limits, we extract the antisymmetric part of the polarization tensor and combine it with the Kubo formula to derive an analytical expression for the quantized anomalous Hall conductance, which is determined solely by the Dirac mass term. The theoretical results not only provide a field-theoretic microscopic explanation for the half-integer conductance contribution of a single Dirac cone, but also perfectly align with cutting-edge experimental observations in magnetic topological insulator thin films, fully demonstrating the rigor and universality of quantum field theory methods in addressing many-body problems in condensed matter physics.

**Keywords:** Quantum Field Theory; Quantum Anomalous Hall Effect; Vacuum Polarization Tensor; Dirac Fermion; Topological Insulator

[1]E-mail: wang.zihan@mail.nankai.edu.cn

# 1 引言

自 1880 年霍尔效应被发现以来，横向电导对材料对称性与拓扑性质的响应一直是凝聚态物理的核心课题。1980 年，整数量子霍尔效应（IQHE）的发现揭示了二维电子气在强外磁场下朗道能级量子化所导致的拓扑平台现象。[1, 2] 然而，传统的量子霍尔效应依赖于外部强磁场破坏时间反演对称性，这极大地限制了其潜在的应用前景。理论上早就预言，如果材料内部自身的性质能够自发打破时间反演对称性，即使在没有外部磁场的条件下，也有可能出现量子化的霍尔电导，这被称为量子反常霍尔效应（QAHE）[3]。

量子反常霍尔效应的物理根源可以用 Haldane 模型来直观理解：在无外场的六角晶格中引入复杂的次近邻跃迁（相当于在动量空间中产生非零的 Berry 曲率），即可诱导出量子化的霍尔电导。[3] 在现代拓扑物态的量子场论（QFT）语言中，QAHE 具有更加深刻的本质：它对应于 2+1 维时空中由于狄拉克费米子获得非零质量项而自发生成的拓扑 Chern-Simons（CS）项。[4, 5] 当狄拉克费米子的质量 $m \neq 0$ 时，系统的宇称对称性和时间反演对称性被打破，真空极化张量中会出现反对称部分，直接导致与质量符号 $\mathrm{sgn}(m)$ 相关的量子化横向电导。[6]

目前，主流的凝聚态物理教材通常采用 k 空间 Berry 曲率积分的方法来计算霍尔电导 [6–9]，这种方法虽然直观，但难以深刻揭示电子-电磁场相互作用在量子层面的根本机制。而在量子场论的框架下，我们可以完全绕过能带论和波函数的具体形式，直接从场论的规范对称性和动力学积分出发，通过计算真空极化张量得到普适的拓扑响应结果。这种方法不仅在数学上更加严谨，更能清晰地展示出 QAHE 作为一个纯粹的量子场论效应（类似于量子电动力学中的反常现象）的美感。

基于上述背景与动机，本文试图在纯量子场论的理论框架下，推导 2+1 维有质量狄拉克系统中的量子反常霍尔效应。具体的解决思路与理论框架如下：首先，从 2+1 维有质量 Dirac 场的拉格朗日量出发，利用诺特定理导出 U(1) 规范守恒流；其次，在引入最小耦合后，严格计算单圈近似下的电子极化张量 $\Pi_{\mu\nu}(q)$；最后，在零温和静态极限下，提取极化张量的反对称部分，并结合 Kubo 公式，推导出仅由质量项决定的量子化反常霍尔电导解析表达式。

# 2 理论框架

## 2.1 二维有质量 Dirac 场的守恒流

与石墨烯中 $m = 0$ 的无质量 Dirac 费米子不同，反常霍尔效应要求系统内部自发打破时间反演对称性。在 2+1 维量子场论中，唯一洛伦兹协变且能打破时间

反演的项是质量项。因此，我们考虑二维有质量 Dirac 场的有效拉氏量：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi, \tag{2.1}$$

其中 $\mu = 0, 1, 2$，$\gamma^0 = \sigma_z$，$\gamma^1 = \mathrm{i}\sigma_y$，$\gamma^2 = -\mathrm{i}\sigma_x$，$\psi$ 为二分量旋量。该体系具有全局的 U(1) 对称性，由诺特定理可得诺特流

$$j^{\mu} = e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi, \tag{2.2}$$

且满足流守恒方程 $\partial_{\mu}j^{\mu} = 0$。该诺特流正是电流。（详细推导过程见附录A）

## 2.2 电子极化张量的计算

在量子场论框架下，我们将外加电磁场视为微扰，并通过最小耦合引入相互作用，得到拉格朗日量和哈密顿量的相互作用项

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = -j^{\mu}A_{\mu}, \tag{2.3}$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{int}} = j^{\mu}A_{\mu}. \tag{2.4}$$

系统的总哈密顿量为

$$H(t) = H_0 + \int \mathrm{d}^2x \; j^{\mu}(\mathbf{x}, t)A_{\mu}(\mathbf{x}, t). \tag{2.5}$$

为计算 $x^0 = t$ 时刻的电流的期待值，考虑如下的绝热过程：当 $t_0 = -\infty$ 时，$A_{\mu} = 0$，系统处于 $H_0$ 的基态 $|0\rangle$ 上；外场从 $t_0 = -\infty$ 时刻缓慢开启，到 $t$ 时刻达到一固定值，而后绝热地退去，回到 $A_{\mu} = 0$。为此，对于电磁场 $A_{\mu}(\mathbf{x}, t')$ 引入绝热开关因子 $\exp(-\varepsilon|t' - t|)(\varepsilon \to 0^+)$，即

$$A_{\mu}^{(\varepsilon)}(\mathbf{x}, t') = \exp(-\varepsilon|t' - t|)A_{\mu}(\mathbf{x}, t'). \tag{2.6}$$

系统哈密顿量的相互作用项改写为

$$H_{\mathrm{int}}^{(\varepsilon)} = \exp(-\varepsilon|t' - t|)\int \mathrm{d}^2x \; j^{\mu}(\mathbf{x}, t)A_{\mu}(\mathbf{x}, t). \tag{2.7}$$

根据 Gell-Mann-Low 定理 [10]，微扰下的物理真空态满足

$$|\Omega\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{U_I^{(\epsilon)}(0, -\infty)\,|0\rangle}{\langle 0|\,U_I^{(\epsilon)}(0, -\infty)\,|0\rangle}, \tag{2.8}$$

其中时间演化算符

$$U(t_2, t_1) = \exp\left(-\mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; H_{\mathrm{int}}^{(\varepsilon)}(t)\right). \tag{2.9}$$

进而得到电流算符的期望

$$\langle j^{\mu}(x)\rangle = \langle\Omega|\,j^{\mu}(x)\,|\Omega\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\langle 0|\,\mathcal{T}[j^{\mu}(x)S^{(\varepsilon)}]\,|0\rangle}{\langle 0|\,S^{(\varepsilon)}\,|0\rangle}, \tag{2.10}$$

其中 $S^{(\varepsilon)}=U_I^{(\varepsilon)}(\infty,-\infty)$.

将(2.10)式近似到 $A$ 的一阶项并取极限，得到

$$\langle j^\mu(x)\rangle=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3y\,\langle 0|\,\mathcal{T}[j^\mu(x)j^\nu(y)]\,|0\rangle\,A_\nu(y), \tag{2.11}$$

其中

$$\Pi^{\mu\nu}(x-y)=-\mathrm{i}\,\langle 0|\,\mathcal{T}[j^\mu(x)j^\nu(y)]\,|0\rangle \tag{2.12}$$

为电子极化张量。附录B给出了其中电流-电流关联函数的计算过程，我们可以得到电子极化张量

$$\Pi^{\mu\nu}(x-y)=\mathrm{i}e^2\,\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu S_F(x-y)\gamma^\nu S_F(y-x)\right], \tag{2.13}$$

将其变换到动量空间，得到

$$\Pi^{\mu\nu}(q)=-\mathrm{i}e^2\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^\nu\frac{\not{p}-\not{q}-m}{(p+q)^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\right] \tag{2.14}$$

## 2.3 霍尔电导的提取

霍尔电导由 Kubo 公式 [5,7] 给出：

$$\sigma_{xy}=\lim_{\omega\to 0}\frac{\mathrm{i}}{\omega}\Pi_{xy}(\omega,\mathbf{q}=0). \tag{2.15}$$

为计算(2.14)式的积分，我们引入 Feymann 参数

$$\frac{1}{AB}=\int_0^1\mathrm{d}x\frac{1}{[xA+(1-x)B]^2}, \tag{2.16}$$

其中 $A=(p-\omega)^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon$，$B=p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon$。作动量平移，令 $p=l+xq$（其中 $q=(\omega,\mathbf{0})$），得到

$$\Pi_{xy}(\omega)=-\mathrm{i}e^2\int\frac{\mathrm{d}^3l}{(2\pi)^3}\int_0^1\mathrm{d}x\frac{\mathrm{Tr}\left[\gamma^1(\not{l}+x\gamma^0\omega+m)\gamma^2(\not{l}-(1-x)\gamma^0\omega+m)\right]}{(l^2-\Delta+\mathrm{i}\epsilon)^2}. \tag{2.17}$$

计算迹并交换积分顺序，得到

$$\Pi_{xy}(\omega)=-e^2\int_0^1\mathrm{d}x\int\frac{\mathrm{d}^3l}{(2\pi)^3}\frac{2m\omega}{(l^2-\Delta+\mathrm{i}\epsilon)^2}. \tag{2.18}$$

计算积分，得到

$$\Pi_{xy}(\omega)=-\frac{\mathrm{i}m\omega e^2}{4\pi|m|}\left[1-\frac{\omega^2}{12m^2}+\mathcal{O}(\omega^4)\right], \tag{2.19}$$

代入 Kubo 公式，并使用国际单位制，计算得到反常霍尔电导

$$\sigma_{xy}=\frac{e^2}{2h}\mathrm{sgn}(m). \tag{2.20}$$

此部分详细计算过程参见附录C。

# 3 理论结果的实验验证

在(2.20)中，系数 1/2 是一个显著的特征。从拓扑场论的角度来看，它对应着单一狄拉克锥对陈数的贡献为 1/2。[5, 6] 在真实的凝聚态材料中，由于自旋和能谷的简并，通常存在偶数个狄拉克锥。因此，理论上的半整数贡献会在宏观输运测量中叠加为整数的量子化电导平台，这是实验上观测到精确整数霍尔电导的微观基础。

本文推导的零磁场下量子化霍尔电导，最著名的实验验证由清华大学薛其坤团队于 2013 年完成 [11]。该团队利用分子束外延（MBE）技术，在精确控制厚度的磁性掺杂拓扑绝缘体 $(Bi, Sb)_2Te_3$ 薄膜中，成功实现了长程铁磁序。在极低温（约 30 mK）且完全零外部磁场的条件下，通过输运测量清晰地观测到霍尔电阻 $\rho_{xy}$ 达到 $h/e^2$（约 25.8 kΩ，同时纵向电阻 $\rho_{xx}$ 降至极小值，如图1所示。

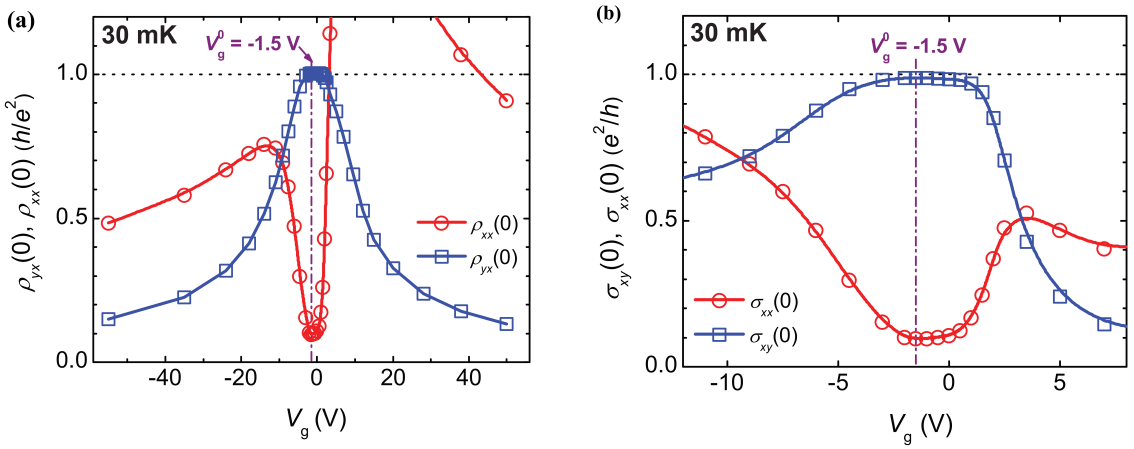



图 1: 零场输运的栅压响应与 (a) 霍尔电阻 (b) 霍尔电导量子化平台 [11]

这一实验现象与本文基于量子场论推导出的量子化电导公式完美吻合。在实验中，薄膜的上下表面各贡献一个狄拉克锥，且由于磁性掺杂导致的能带反转。两个表面的等效质量符号相反（分别对应 $\mathrm{sgn}(m) = \pm 1$ 的边缘态），最终导致总的霍尔电导为 $\sigma_{xy} = e^2/h$。

# 4 结论

本文在量子场论的理论框架下，成功推导了 2+1 维有质量狄拉克系统中的量子反常霍尔效应，得出反常霍尔电导与费米子质量符号直接相关的量子化解析表达式。这一推导过程表明，系统时间反演对称性的破缺（即非零质量项的引入）会直接导致真空极化张量中出现非零的反对称部分，其低频极限严格给出了单一狄拉克锥对拓扑电导半整数量（$e^2/2h$）的贡献。通过将场论计算得出的这一半整数结果与磁性掺杂拓扑绝缘体薄膜的零场输运实验结果相结合，本文从微观层面解

释了宏观测量中精确整数霍尔电导平台的物理起源，即上下表面狄拉克锥由于能带反转导致质量符号相反，从而使得半整数贡献叠加为整数。该工作为量子反常霍尔效应提供了一个无需依赖具体晶格能带结构的纯场论证明，展示了量子场论中的绝热微扰、真空极化以及 Wick 转动等核心技术在解决凝聚态前沿物理问题中的强大生命力。

# 参考文献

[1] Klitzing K, Dorda G, Pepper M. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance[J]. Physical review letters, 1980, 45(6): 494.

[2] Thouless D J, Kohmoto M, Nightingale M P, et al. Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential[J]. Physical review letters, 1982, 49(6): 405.

[3] Haldane F D M. Model for a quantum Hall effect without Landau levels: Condensed-matter realization of the" parity anomaly"[J]. Physical review letters, 1988, 61(18): 2015.

[4] Niemi A J, Semenoff G W. Axial-anomaly-induced fermion fractionization and effective gauge-theory actions in odd-dimensional space-times[J]. Physical Review Letters, 1983, 51(23): 2077.

[5] Fradkin E. Field theories of condensed matter physics[M]. Cambridge University Press, 2013.

[6] X.-L. Qi and S.-C. Zhang, “Topological Insulators and Superconductors”, Rev. Mod. Phys. 83, 1057 (2011). DOI: 10.1103/RevModPhys.83.1057.

[7] Tong D. Lectures on the quantum Hall effect[J]. arXiv preprint: 61-73. arXiv:1606.06687, 2016.

[8] Bernevig B A. Topological insulators and topological superconductors[M]. Princeton university press, 2013.

[9] Nagaosa N, Sinova J, Onoda S, et al. Anomalous hall effect[J]. Reviews of modern physics, 2010, 82(2): 1539-1592.

[10] Fetter A L, Walecka J D. Quantum Theory of Many-particle Systems[M]. Courier Corporation, 2003.

[11] Chang C Z, Zhang J, Feng X, et al. Experimental observation of the quantum anomalous Hall effect in a magnetic topological insulator[J]. Science, 2013, 340(6129): 167-170.

# A 二维有质量 Dirac 场的守恒流推导

对于(2.1)式给出的有效拉氏量，考虑全局的 U(1) 变换

$$\psi \to e^{\mathrm{i}\alpha}\psi, \quad \bar{\psi} \to e^{-i\alpha}\bar{\psi}, \tag{A.1}$$

其对应的无穷小变换为

$$\psi \to \psi + \mathrm{i}\alpha\psi, \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi} - \mathrm{i}\alpha\bar{\psi}, \tag{A.2}$$

从而拉格朗日量的变换

$$\delta\mathcal{L} = (\bar{\psi} - \mathrm{i}\alpha\bar{\psi})(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)(\psi + \mathrm{i}\alpha\psi) - \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 + O(\alpha^2), \tag{A.3}$$

由诺特定理，诺特流为

$$j^\mu = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\delta\bar{\psi} = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \tag{A.4}$$

调整符号，得到

$$j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{A.5}$$

结合 Dirac 方程

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0, \tag{A.6}$$

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu + m)\bar{\psi} = 0, \tag{A.7}$$

验证流守恒：

$$\partial_\mu j^\mu = e\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = e(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) = \mathrm{i}me\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \mathrm{i}me\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = 0. \tag{A.8}$$

# B 电子极化张量的计算

在取极限的意义下，对(2.10)式的分子和分母分别作近似

$$\langle 0|\,\mathcal{T}[j^\mu(x)S^{(\varepsilon)}]\,|0\rangle = \langle 0|\,j^\mu(x)\,|0\rangle - \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3y\,\langle 0|\,\mathcal{T}[j^\mu(x)j^\nu(y)]\,|0\rangle\,A_\nu(y) + \mathcal{O}(A^2), \tag{B.1}$$

$$\langle 0|\,S^{(\varepsilon)}\,|0\rangle = 1 - \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3y\,\langle 0|\,j^\nu(y)\,|0\rangle\,A_\nu(y) + \mathcal{O}(A^2). \tag{B.2}$$

结合电流在真空态下的期望值为 0，即 $\langle 0|\,j^\mu(y)\,|0\rangle = 0$，由(2.10)式可立刻得到(2.11)。

下面计算电子极化张量中的关键部分

$$\langle 0|\,\mathcal{T}[j^\mu(x)j^\nu(y)]\,|0\rangle = \theta(x^0-y^0)\,\langle 0|\,j^\mu(x)j^\nu(y)\,|0\rangle - \theta(y^0-x^0)\,\langle 0|\,j^\nu(y)j^\mu(x)\,|0\rangle \tag{B.3}$$

代入(2.2)及 Dirac 场算符的平面波展开

$$\psi(x) = \sum_{s=\pm}\int \frac{\mathrm{d}^2p}{(2\pi)^2}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left(a_{p,s}u_s(p)e^{-\mathrm{i}p\cdot x} + b^\dagger_{p,s}v_s(p)e^{\mathrm{i}p\cdot x}\right), \tag{B.4}$$

$$\bar\psi(x) = \sum_{s=\pm}\int \frac{\mathrm{d}^2p}{(2\pi)^2}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left(a^\dagger_{p,s}\bar u_s(p)e^{\mathrm{i}p\cdot x} + b_{p,s}\bar v_s(p)e^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right), \tag{B.5}$$

得到第一个电流-电流关联函数

$$\begin{aligned}\langle 0|\,j^\mu(x)j^\nu(y)\,|0\rangle = e^2\sum_{r,s,m,n=\pm}\int \frac{\mathrm{d}^2p\;\mathrm{d}^2q\;\mathrm{d}^2k\;\mathrm{d}^2l}{(2\pi)^8}\frac{\exp[\mathrm{i}(p-q)x+\mathrm{i}(k-l)y]}{\sqrt{2^4E_pE_qE_kE_l}}\\ \langle 0|\,(a^\dagger_{p,r}\bar u_r(p)+b_{-p,r}\bar v_r(-p))\gamma^\mu(a_{q,s}u_s(q)+b^\dagger_{-q,s}v_s(-q))\\ (a^\dagger_{k,m}\bar u_m(k)+b_{-k,m}\bar v_m(-p))\gamma^\nu(a_{l,n}u_n(l)+b^\dagger_{-l,n})v_n(-l)\,|0\rangle\,,\end{aligned} \tag{B.6}$$

其中 $a, a^\dagger$ 是电子的湮灭算符和产生算符，$, b^\dagger$ 是反电子的湮灭算符和产生算符，$r,s,m,n$ 是自旋指标，$u,\bar u, v, \bar v$ 为 2+1 维 Dirac 方程的平面波解。

将(B.6)展开，可以得到 16 项四点关联函数，为得到非零的项，至少应保证最左边为湮灭算子、最右边为产生算子且存在两个产生湮灭算符和两个产生算符，因此非零的项至多有 2 项，依次计算：

$$\begin{aligned}\langle 0|\,b_{-p,r}a_{q,s}a^\dagger_{k,m}b^\dagger_{-l,n}\,|0\rangle &= \langle 0|\left[-a^\dagger_{k,m}a_{q,s}+\{a_{q,s}a^\dagger_{k,m}\}\right]\left[-b^\dagger_{-l,n}b_{-p,r}+\{b_{-p,r}b^\dagger_{-l,n}\}\right]|0\rangle\\ &= (2\pi)^4\delta^{(2)}(q-k)\delta^{(2)}(p-l)\delta_{sm}\delta_{rn}\end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}\langle 0|\,b_{-p,r}b^\dagger_{-q,s}b_{-k,m}b^\dagger_{-l,n}\,|0\rangle &= \langle 0|\left[-b^\dagger_{-q,s}b_{-q,r}+\{b_{-p,r},b^\dagger_{-q,s}\}\right]\left[-b^\dagger_{-l,n}b_{-k,m}+\{b_{-k,m},b^\dagger_{-l,n}\}\right]|0\rangle\\ &= (2\pi)^4\delta^{(2)}(p-q)\delta^{(2)}(k-l)\delta_{rs}\delta_{mn}\end{aligned} \tag{B.8}$$

对自旋指标求和并对动量求积分，第一项对应

$$\begin{aligned}&\sum_{r,s=\pm}\int\frac{\mathrm{d}^2p\mathrm{d}^2q}{(2\pi)^4}\frac{\exp[\mathrm{i}(p-q)(x-y)]}{4E_pE_q}\bar v_r(-p)\gamma^\mu u_s(q)\bar u_s(q)\gamma^\nu v_r(-p)\\ =&\sum_{r=\pm}\int\frac{\mathrm{d}^2p\mathrm{d}^2q}{(2\pi)^4}\frac{\exp[\mathrm{i}(p-q)(x-y)]}{4E_pE_q}\bar v_r(-p)\gamma^\mu(\not q+m)\gamma^\nu v_r(-p)\\ =&\int\frac{\mathrm{d}^2p\mathrm{d}^2q}{(2\pi)^4}\frac{\exp[\mathrm{i}(p-q)(x-y)]}{4E_pE_q}\,\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu(\not q+m)\gamma^\nu\sum_{r=\pm}v_r(-p)\bar v_r(-p)\right]\\ =&-\int\frac{\mathrm{d}^2p\mathrm{d}^2q}{(2\pi)^4}\frac{\exp[\mathrm{i}(p-q)(x-y)]}{4E_pE_q}\,\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu(\not q+m)\gamma^\nu(\not p+m)\right],\end{aligned} \tag{B.9}$$

第二项对应

$$\sum_{r,m=\pm}\int\frac{\mathrm{d}^2p\mathrm{d}^2k}{(2\pi)^4}\frac{1}{4E_pE_k}\bar{v}_r(-p)\gamma^\mu v_r(-p)\bar{v}_m(-k)\gamma^\nu v_m(-k). \tag{B.10}$$

(B.10)式与 $x,y$ 无关，在考虑编时运算后被抵消掉。因此电子极化张量为

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu}(x-y)=&-\mathrm{i}\left\langle 0\right|\mathcal{T}[j^\mu(x)j^\nu(y)]\left|0\right\rangle\\ =&\mathrm{i}e^2\int\frac{\mathrm{d}^2p\mathrm{d}^2q}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu(\not{q}+m)\gamma^\nu(\not{p}+m)\right]}{4E_pE_q}\\ &\left[\theta(x^0-y^0)\exp\left[\mathrm{i}(p-q)(x-y)\right]-\theta(y^0-x^0)\exp\left[\mathrm{i}(p-q)(y-x)\right]\right]\\ =&\mathrm{i}e^2\,\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu S_F(x-y)\gamma^\nu S_F(y-x)\right].\end{aligned} \tag{B.11}$$

将位置空间的极化张量变换到动量空间

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu}(q)=&\int\mathrm{d}^3r\exp(\mathrm{i}qr)\Pi^{\mu\nu}(r)\\ =&\mathrm{i}e^2\int\mathrm{d}^3\exp(\mathrm{i}qr)\int\frac{\mathrm{d}^3p\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^6}\exp(\mathrm{i}(k-p)r)\,\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\frac{\mathrm{i}(\not{p}+m)}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^\nu\frac{\mathrm{i}(\not{k}+m)}{k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\right]\\ =&-\mathrm{i}e^2\int\frac{\mathrm{d}^3p\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^6}\delta^{(3)}(q+k-p)\,\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^\nu\frac{\not{k}+m}{k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\right]\\ =&-\mathrm{i}e^2\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^\nu\frac{\not{p}-\not{q}-m}{(p+q)^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\right]\end{aligned} \tag{B.12}$$

# C 霍尔电导的计算

极化张量的 $xy$ 分量为

$$\Pi_{xy}(\omega,\mathbf{q}=0)=-\mathrm{i}e^2\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathrm{Tr}\left[\gamma^1\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^2\frac{\not{p}-\gamma^0\omega+m}{(p-\omega)^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\right], \tag{C.1}$$

其中 $(p-\omega)^2=(p^0-\omega)^2-|\mathbf{p}|^2$。

引入 Feymann 参数

$$\frac{1}{AB}=\int_0^1\mathrm{d}x\frac{1}{[xA+(1-x)B]^2}, \tag{C.2}$$

取 $A=(p-\omega)^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon$，$B=p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon$，从而

$$D=xA+(1-x)B=(p^0-x\omega)^2-|\mathbf{p}|^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon-x(1-x)\omega^2. \tag{C.3}$$

作动量平移，记 $\Delta=m^2+x(1-x)\omega^2$，$l^0=p^0-x\omega$，$\mathbf{l}=\mathbf{p}$，即 $p=l-xq$，从而

$$\Pi_{xy}(\omega)=-\mathrm{i}e^2\int\frac{\mathrm{d}^3l}{(2\pi)^3}\int_0^1\mathrm{d}x\frac{\mathrm{Tr}\left[\gamma^1(\not{l}+x\gamma^0\omega+m)\gamma^2(\not{l}-(1-x)\gamma^0\omega+m)\right]}{(l^2-\Delta+\mathrm{i}\epsilon)^2}. \tag{C.4}$$

将分子展开，记

$$T_1 = \mathrm{Tr}\big(\gamma^1 \not{l} \gamma^2 \not{l}\big) = \mathrm{Tr}\big(\gamma^1\gamma^\alpha\gamma^2\gamma^\beta\big) l_\alpha l_\beta, \tag{C.5}$$

$$T_2 = \mathrm{Tr}\big[\gamma^1 \not{l} \gamma^2(-(1-x)\gamma^0\omega)\big] + \mathrm{Tr}\big[\gamma^1(x\gamma^0\omega)\gamma^2\not{l}\big], \tag{C.6}$$

$$T_3 = \mathrm{Tr}\big[\gamma^1(x\gamma^0\omega)\gamma^2(-(1-x)\gamma^0\omega)\big], \tag{C.7}$$

$$\begin{aligned} T_4 = \mathrm{Tr}\big[\gamma^1 \not{l} \gamma^2 m\big] + \mathrm{Tr}\big[\gamma^1(x\gamma^0\omega)\gamma^2 m\big] + \mathrm{Tr}\big[\gamma^1 m\gamma^2\not{l}\big] \\ + \mathrm{Tr}\big[\gamma^1 m\gamma^2(-(1-x)\gamma^0\omega)\big] + \mathrm{Tr}\big[\gamma^1 m\gamma^2 m\big]. \end{aligned} \tag{C.8}$$

表 1: 不同指标对 $(\alpha,\beta)$ 对应的迹 $\mathrm{Tr}\big(\gamma^1\gamma^\alpha\gamma^2\gamma^\beta\big)$ 的值

| $(\alpha,\beta)$ | $\mathrm{Tr}\big(\gamma^1\gamma^\alpha\gamma^2\gamma^\beta\big)$ |
|---|---|
| (0,0) | 0 |
| (1,0) | 0 |
| (2,0) | 0 |
| (0,1) | 0 |
| (1,1) | 0 |
| (2,1) | 2 |
| (0,2) | 0 |
| (1,2) | 2 |
| (2,2) | 0 |

结合表1计算各项，得到

$$T_1 = 4l_1 l_2, T_2 = T_3 = 0, T_4 = -2\mathrm{i}m\omega, \tag{C.9}$$

其中根据对称性 $T_1$ 在积分后对 $\Pi_{xy}(\omega)$ 的贡献为 0，因此

$$\Pi_{xy}(\omega) = -e^2 \int_0^1 \mathrm{d}x \int \frac{\mathrm{d}^3 l}{(2\pi)^3} \frac{2m\omega}{(l^2 - \Delta + \mathrm{i}\epsilon)^2}. \tag{C.10}$$

为了计算上述积分，我们进行 Wick 转动。被积函数的分母在 $l_0$ 复平面上的极点为 $l_0 = \pm\sqrt{\mathbf{l}^2 + \Delta - \mathrm{i}\epsilon}$。由于 $\mathrm{i}\epsilon$ 的存在，这两个二阶极点均偏离实轴，分别位于第一和第三象限。根据 Cauchy 定理，我们可以安全地将 $l_0$ 的实轴积分逆时针旋转 $90^\circ$ 至虚轴，而不会扫过任何极点。作如下变量变换

$$l_E^0 = \mathrm{i}l^0, l_E^1 = l^1, l_E^2 = l^2 \tag{C.11}$$

将 Minkowski 空间变换为 Euclidean 空间：

$$\Pi_{xy}(\omega) = -2\mathrm{i}m\omega e^2 \int_0^1 \mathrm{d}x \int \frac{\mathrm{d}^3 l_E}{(2\pi)^3} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = -2\mathrm{i}m\omega e^2 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{8\pi\sqrt{\Delta}}. \tag{C.12}$$

根据 Kubo 公式(2.15)，当 $\omega \to 0$ 时，

$$\Delta^{-1/2} = \frac{1}{|m|}\left[1 - \frac{x(1-x)\omega^2}{2m^2} + \mathcal{O}(\omega^4)\right], \tag{C.13}$$

对 $x$ 积分，

$$\Pi_{xy}(\omega) = -\frac{\mathrm{i}m\omega e^2}{4\pi|m|}\left[1 - \frac{\omega^2}{12m^2} + \mathcal{O}(\omega^4)\right], \tag{C.14}$$

从而得到反常霍尔电导

$$\sigma_{xy} = \lim_{\omega\to 0}\frac{\mathrm{i}}{\omega}\Pi_{xy}(\omega, \mathbf{q}=0) = \frac{e^2}{4\pi}\mathrm{sgn}(m), \tag{C.15}$$

将自然单位制转换为国际单位制

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2h}\mathrm{sgn}(m). \tag{C.16}$$